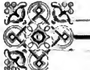
BIBLIOGRAPHIC RECORD TARGET

ACM1802
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B25996
035/2: : |a (CaOTULAS)160431381
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Schlömilch, Oskar Xaver, |d 1823-1901.
245:04: |a Die allgemeine Umkehrung gegebener Funktionen: |b eine Monographie.
260: : |a Halle, |b Druck und Verlag von H. W. Schmidt, |c 1849.
300/1: : |a 56 p. |c 24 cm.
500/1: : |a Errata leaf inserted.
650/1: 0: |a Functions
650/2: 0: |a Series, Infinite
998: : |c JMH |s 9124



DIE

ALLGEMEINE UMKEHRUNG

GEGEBENER

FUNKTIONEN.

Eine Monographie

von

Dr. *Oskar Schloemilch*,
Professor an der Universität Jena.

HALLE,

DRUCK UND VERLAG VON H. W. SCHMIDT.

1849.



DIE ALLGEMEINE UMKEHRUNG GEGEBENER FUNKTIONEN.

Eine Monographie

von

Dr. *Oskar Schloemilch*,
Professor an der Universität Jena.

HALLE,
DRUCK UND VERLAG VON H. W. SCHMIDT.
1849.

Der Unterschied zwischen der höheren Analysis und der elementaren Arithmetik besteht ohne Zweifel darin, dass es jene mit stetig veränderlichen Zahlen, letztere dagegen mit solchen Grössen zu thun hat, welche aus diskreten Theilen der Einheit zusammengesetzt sind, und man könnte daher, wenn man sich ausnahmsweise in der strengen Wissenschaft einmal die bildliche Rede erlaubt, die Vergleichung aussprechen, dass die höhere Analysis die organische, die Elementararithmetik dagegen die unorganische Veränderung der Zahlen betrachte. Es würde nun aber zu Nichts führen, wenn man hier bei der Supposition einer einzigen dergleichen schlechthin veränderlichen Zahl stehen bleiben wollte, weil sich über eine solche Zahl, eben wegen ihrer absoluten Veränderlichkeit, nur äusserst wenig und zwar ungefähr Dasselbe wie über die Zeit sagen liesse, und so fand sich die Wissenschaft genöthigt, einen Schritt weiter zu gehen, indem sie mehrere Variable, zwischen denen irgend ein Zusammenhang statt findet, in Untersuchung zog Allbekannt ist es, dass diese Betrachtung auf den allgemeinsten Begriff der Mathematik, nämlich auf den Begriff der Funktion, führte und erst seit der Zeit, wo dieser Begriff in seiner Reinheit und in seinem ganzen Umfange gefasst wurde, hat sich die Wissenschaft zu demjenigen Grade der Allgemeinheit erhoben, welcher ihrer würdig und ihr überhaupt erreichbar ist. Je weniger man diese Bemerkung in Abrede stellen wird, desto mehr muss es befremden, dass man gerade einem der Haupt- und Fundamentalprobleme, welches schon ans der blossen Aufstellung einer Funktionsgleichung hervorgeht, eine (wenigstens gegenwärtig) viel geringere Auf-

merksamkeit geschenkt hat, als dasselbe seiner Wichtigkeit nach verdient; findet nämlich zwischen einer unabhängigen Variable y und einer abhängigen Veränderlichen x eine Gleichung von der Form

$$1. \qquad x = \psi(y)$$

statt, so kann umgekehrt auch y als eine Funktion von x betrachtet werden, indem man x und y ihre Rollen tauschen lässt und den Charakter der absoluten Veränderlichkeit von y auf x überträgt; man kann daher setzen:

$$2. \qquad y = \varphi(x)$$

und hat nun die Aufgabe: „aus der Form der gegebenen Funktion ψ die Form der unbekannten Funktion φ abzuleiten“, was nichts Anderes ist als das Problem von der Umkehrung gegebener Funktionen. — Man wird leicht bemerken, dass diese Aufgabe die Auflösung aller möglichen, sowohl algebraischen als transscendenten, Gleichungen implizirt; denn setzen wir z. B., um bei einer sehr bekannten astronomischen Gleichung stehen zu bleiben,

$$x = y - \varepsilon \sin y$$

worin ε eine Constante bezeichnen mag, so ist die umgekehrte Funktion $y = \varphi(x)$ nichts weiter als eine Wurzel der aufgestellten transscendenten Gleichung.

Die älteren Behandlungen.

§. 1.

Den ersten Versuch zur Lösung der angedeuteten allgemeinen Aufgabe finden wir bei *Newton;* für den besonderen Fall nämlich, dass man durch successive Potenzirung der Reihe und Elimination der höheren Potenzen von y zur Umkehrung der Reihe (oder Funktion) gelangen will, giebt er folgendes Beispiel *). *Proponatur aequatio ad aream Hyperbolae*

---

*) *Commercium epistolicum pag.* 187, ferner *Analysis per Quantitatum series, fluxiones ac differentias: cum enumeratione linearum tertii ordinis. Amstelodami* 1723, *pagg.* 34, 35 und *Epistola ad Oldenburg posterior cum Leibnitio communicanda. Leipn. Opp. T. III, pag.* 75. Der Gleichförmigkeit habe ich oben x und y da gesetzt, wo bei Newton z und x stehen.

$$x = y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 + \ldots$$

Et partibus ejus multiplicatis inter se, emerget

$$x^2 = y^2 + y^3 + \frac{11}{12}y^4 + \frac{5}{6}y^5 + \ldots.$$
$$x^3 = y^3 + \frac{3}{2}y^4 + \frac{7}{4}y^5 + \ldots$$
$$x^4 = y^4 + 2y^5 + \ldots$$
$$x^5 = y^5 + \ldots$$

Jam de x aufero $\frac{1}{2}x^2$ et restat

$$x - \frac{1}{2}x^2 = y - \frac{1}{6}y^3 - \frac{5}{24}y^4 - \frac{13}{60}y^5 \ldots$$

Huic addo $\frac{1}{6}x^3$, et fit

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 = y + \frac{1}{24}y^4 + \frac{3}{40}y^5 \ldots.$$

Aufero $\frac{1}{24}x^4$, et restat

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 = y - \frac{1}{120}y^5 \ldots..$$

Addo $\frac{1}{120}x^5$, et fit

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{71}{120}x^5 = y$$

quam proxime, sive $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5$ *etc.*"
Stellt man die Newton'sche Methode in allgemeinen Symbolen dar, indem man $x = ay + by^2 + cy^3 +$ etc. setzt, so erhält man zunächst durch successive Potenzirungen Gleichungen von folgenden Formen:

$$\begin{aligned}
x &= ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + \ldots \\
x^2 &= \quad a'y^2 + b'y^3 + c'y^4 + \ldots \\
x^3 &= \quad\quad a''y^3 + b''y^4 + \ldots \\
x^4 &= \quad\quad\quad a'''y^4 + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Addirt man diese Gleichungen, nachdem man die erste mit A, die zweite mit B, die dritte mit C etc. multiplicirt hat, wobei A, B, C etc. vor der Hand noch unbestimmte Koefficienten sind, so wird

$$\begin{aligned}
&Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots. \\
&= Aay + (Ab + Ba')\,y^2 \\
&\quad + (Ac + Bb' + Ca'')\,y^3 \\
&\quad + (Ad + Bc' + Cb'' + Da''')\,y^4 \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

und wenn man jetzt die Grössen A, B, C, D etc. so bestimmt, dass

$$Aa = 1$$
$$Ab + B'a = o;$$

$$Ac + Bb' + Ca'' = o$$
$$Ad + Bc' + Cb'' + Da''' = o$$
etc.

ist, so bleibt auf der rechten Seite der vorigen Gleichung nur y stehen und man hat bei umgekehrter Stellung

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \dots$$

womit die Aufgabe wieder in Form einer Reihe gelöst ist.

So einfach dieses Verfahren bei einer nur schematischen Darstellung aussieht, so complizirt wird es bei der detaillirten Ausführung. Das Gesetz nämlich, nach welchem sich die Koefficienten a', b', c' etc., a'', b'', c'' etc. bilden, hängt unmittelbar mit dem Bildungsgesetze der Polynomialcoefficienten zusammen und man weiss, dass letzteres sich zwar leicht in Gestalt einer Rekursionsformel, aber nur schwer in einer independenten Formel ausdrücken lässt. Zwar hat sich die combinatorische Schule unter *Hindenburg*, *Eschenbach*, *Rothe* u. A. unendliche Mühe mit der independenten Entwickelung der Potenzen eines Polynomes [oder gar Infinitonomes, wie Hindenburg sagt*)] gegeben und ebenso auch das Problem der Umkehrung der Reihen combinatorisch zu lösen gesucht**), aber es fehlt allen diesen Formeln Eines: die praktische Brauchbarkeit. Allerdings kann jede Formel auf den Namen einer independenten Anspruch machen, welche die zur Bestimmung einer unbekannten Grösse nöthigen Rechnungsoperationen unmittelbar übersehen lässt, ohne das Problem auf ein anderes und ähnliches zurückzuführen, aber es ist ein sehr wesentlicher Unterschied, welche Operationen durch die Formel vorgeschrieben sind.

---

*) *Infinitonomii dignitatum exponentis indeterminati historia, leges ac formulae, Gottinguae* 1779.

**) M. s. das Wichtigste hierüber: *De serierum reversione formulis analytico-combinatoriis exhibita, auct. H. C. W. Eschenbach; Lips.* 1789.

Formulae de serierum reversione demonstratio universalis signis localibus combinatorio-analyticorum vicariis exhibita; auct. H. A. Rothe. Lips. 1793.

Problema solutum maxime universale ad serierum reversione formulis localibus et combinatorio-analyticis absolvendam paralipomenon; auct. Hindenburg. Lips. 1793.

Sagt man z. B. das mittelste Glied in der Entwickelung von $(z + \frac{1}{z})^{2m}$ hat den Werth

$$\frac{2m\ (2m-1)\ (2m-2)\ldots\ldots(m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\ldots m}$$

oder auch

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1 + 2\cos u)^m\, du$$

so ist das Eine wie das Andere eine independente Bestimmung und welche von ihnen vorzuziehen sei, richtet sich nach der Grösse von m; für kleine m ist natürlich die erste Angabe die bequemere, für sehr grosse m dagegen, wie sie z. B. in der Wahrscheinlichkeitsberechnung vorkommen, wird umgekehrt die zweite Form besser und die erste völlig unbrauchbar; denn man kann in diesem Falle den Werth des bestimmten Integrales nach den von *Legendre* und *Laplace* gegebenen Methoden sehr leicht mit vieler Genauigkeit berechnen, während eine Multiplikation von etlichen tausend Faktoren eine ganz unausführbare Arbeit ist, von deren Endresultate man nicht einmal eine angenäherte Vorstellung hat. Ebenso verhält es sich mit der combinatorischen Angabe von Reihenkoefficienten; die anfänglichen Koefficienten sind zwar leicht genug zu entwickeln, bei einem einigermassen grossen Index aber wird die Anzahl der aufzustellenden Combinationen so ungeheuer, dass dem Rechner die Geduld und der combinatorischen Thätigkeit der Athem ausgeht, ohne dass man von dem Endresultate nur irgend eine Vorstellung bekommen hätte. Hierin liegt auch der Grund, warum die Franzosen und Engländer, deren Sinn mehr auf das praktisch Brauchbare (ich meine hier die wissenschaftliche Praxis) gerichtet ist, wenig Geschmack an den Arbeiten der combinatorischen Schule gefunden und dieselben stellenweis für einen blossen *lusus ingenii* gehalten haben.

§. 2.

Eine bei weitem elegantere Lösung des Umkehrungsproblemes

lieferte *Pfaff**) mit Hülfe einer von *Lagrange* gefundenen Formel. Wendet man die letztere in der Gestalt an, welche ihr *Cauchy* gegeben hat, so lässt sich die Sache folgendermassen darstellen.

Es sei y_0 diejenige Wurzel der Gleichung

$$3. \qquad y = x f(y)$$

welche mit x gleichzeitig verschwindet, so ist nach dem Theoreme von *Lagrange* **)

$$4. \quad y_0 = \frac{x}{1}[f(y)]_{(0)} + \frac{x^2}{1.2}[D f(y)^2]_{(0)} + \frac{x^3}{1.2.3}[D^2 f(y)^3]_{(0)} + \dots$$

wobei die in Klammern angehängten Nullen bedeuten, dass man nach geschehener Differenziation $y = o$ zu setzen habe, wonach z. B. $[f(y)]_{(0)} = f(0)$ ist. Die Bedingungen, unter welchen diese Formel richtig ist, bestehen darin, dass erstlich $f(y)$, $f'(y)$, $f''(y)$ etc. von $y = 0$ an stetig und endlich bleibende Funktionen sind, deren erste für $y = 0$ weder verschwindet noch unendlich gross wird, und dass zweitens der Modulus von x weniger beträgt als der Modulus des kleinsten x, welches man durch Auflösung der beiden Gleichungen

$$5. \qquad \frac{y}{f(y)} = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{und} \quad x = \frac{y}{f(y)}$$

erhält; d. h. also, wenn $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots$ die Wurzeln der ersten Gleichung in 5. sind und als deren Substitution in die zweite die speciellen Werthe $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ für x folgen, von denen ξ_0 der kleinste sei, so ist die Bedingung $mod\, x < mod\, \xi_0$ nothwendig.

Nehmen wir $\frac{y}{f(y)} = \psi(y)$, so geht die vorausgesetzte Gleichung 3. in die zu behandelnde

$$6. \qquad x = \psi(y)$$

über und es wird nach der Formel 4., weil jetzt $f(y) = \frac{y}{\psi(y)}$ ist,

---

*) *Disquisitiones analyticae. Helmstadii MDCCLXXXXVIII.*

**) Man sehe hierüber mein Handbuch der Differenzialrechnung, Greifswald 1847.

$$7. \; y_0 = \frac{x}{1}\left[\frac{y}{\psi(y)}\right]_{(0)} + \frac{x^2}{1.2}\left[D\left(\frac{y}{\psi(y)}\right)^2\right]_{(0)} + \frac{x^3}{1.2.3}\left[D^2\left(\frac{y}{\psi(y)}\right)^3\right]_{(0)} + \cdots$$

worin das Bildungsgesetz klar vorliegt. Der Koefficient von x^n wäre überhaupt

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n} D^{n-1}\left(\frac{y}{\psi(y)}\right)^n \text{ für } y = 0$$

und damit sind wir zu einer independenten Bestimmung gelangt. Die Formel 7. gilt übrigens nur, so lange erstlich die Funktionen

$$\frac{y}{\psi(y)},\; D\frac{y}{\psi(y)},\; D^2\frac{y}{\psi(y)},\; D^3\frac{y}{\psi(y)},\ldots$$

von $y = 0$ an stetig und endlich bleiben, wobei die erste für $y = 0$ weder Null noch unendlich werden darf, und wenn zweitens der Modulus von x weniger beträgt als der Modulus des kleinsten x, welches durch Auflösung der Gleichungen

$$8. \qquad \psi'(y) = 0 \text{ und } x = \psi(y)$$

erhalten wird. Das Letztere sieht man leicht, wenn man auch in den Gleichungen 5. $\psi(y)$ an die Stelle von $\frac{y}{f(y)}$ treten lässt, wo

$$f(y) = \frac{y}{\psi(y)} \text{ und } f'(y) = \frac{\psi(y) - y\,\psi'(y)}{\psi(y)^2}$$

wird, was leicht zu substituiren ist. Man kann übrigens den Sinn der Gleichungen 8. ohne Mühe auffinden; sie dienen nämlich zur Bestimmung der verschiedenen Maxima und Minima der Funktion $\psi(y)$. Bezeichnen wir mit η_0, η_1, η_2 etc. die Wurzeln dar Gleichung $\psi'(y) = 0$, und mit ξ_0, ξ_1, ξ_2 etc. die Werthe, welche $\psi(y)$ erhält, wenn man $y = \eta_0$, η_1, η_2 etc. setzt, so sind ξ_0, ξ_1, ξ_2 etc. die Maxima und Minima der Funktion $\psi(y)$; nennen wir ferner diejenige von den Grössen ξ_0, ξ_1, ξ_2 etc., welche den kleinsten Modulus hat, das absolute Minimum von $\psi(y)$, so ist nach dem Vorigen die Gleichung 7. an die Bedingung gebunden, dass der Modulus von x weniger beträgt, als der Modulus des absoluten Minimums von $\psi(y)$.

Um diese Lehre, in deren Darstellung wir von Pfaff mehrfach

abgewichen sind, auf ein nicht zu gewöhnliches Beispiel anzuwenden, wollen wir die Umkehrung der Gleichung

9. $$x = l\Gamma(1+y) = l\Pi_y$$

vornehmen, worin $\Gamma(1+y)$ das Légendre'sche und Π_y das Gauss'-sche Zeichen für das Euler'sche Integral

$$\int_0^\infty t^y e^{-t} dt$$

ist. Da nach einer bekannten Formel*) die Gleichung

10. $$l\Gamma(1+y) = -Cy + \tfrac{1}{2}S_2y^2 - \tfrac{1}{3}S_3y^3 + \tfrac{1}{4}S_4y^4 - \ldots\ldots$$
$$1 > y > -1$$

bnsteht, worin $C = 0{,}5772156$ und S_m die Summe der Reihe

$$\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \ldots$$

ist, so hat man an die Stelle von $\frac{y}{\psi(y)}$ zu setzen

11. $$\frac{y}{l\Gamma(1+y)} = \frac{y}{l\Pi_y} = \frac{1}{-C + \frac{1}{2}S_2y - \frac{1}{3}S_3y^2 + \ldots}$$

und daraus geht hervor, dass die Funktion $\frac{y}{\psi(y)}$ nebst ihren Differenzialquotienten endlich und stetig bleibt innerhalb eines bei $y=0$ anfangenden Intervalles, während für $y=0$ der in 11. verzeichnete Ausdruck einen endlichen bestimmten Werth annimmt. Man hat daher nach No. 7.

12. $$y_0 = \frac{x}{1}\left[\frac{y}{l\Pi_y}\right]_{(0)} + \frac{x^2}{1.2}\left[D\left(\frac{y}{l\Pi_y}\right)^2\right]_{(0)} + \frac{x^3}{1.2.3}\left[D^2\left(\frac{y}{l\Pi_y}\right)^3\right]_{(0)} + \ldots$$

und wenn man die angedeuteten Potenzirungen und Differenziationen dadurch ausführt, dass man für $\frac{y}{l\Pi_y}$ den in No. 11. verzeichneten Ausdruck substituirt,

---

*) M. s. hierüber den ersten Theil meiner Analytischen Studien, Leipzig 1848.

$$y_0 = -\frac{x}{1}\cdot\frac{1}{C} + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{S_2}{C^3} - \frac{x^3}{3}\left(\frac{3}{2}\frac{S_2{}^2}{C^5} - \frac{S_3}{C^4}\right)$$
$$+\frac{x}{4}\left(\frac{5}{2}\frac{S_2{}^3}{C^7} - \frac{10}{3}\frac{S_2 S_3}{C^6} + \frac{S_4}{C^5}\right) - \ldots\ldots$$

Wie weit diess gilt entscheidet sich leicht. Die Funktion $l\Gamma(1+y)$ hat nämlich unendlich viele Maxima, welche der Reihe nach zwischen 0 und 1, 1 und 2, 2 und 3 etc. enthalten sind. Das absolute Minimum tritt ein für $y = 0{,}4616321$ und ist $l\Gamma\,(1{,}4616321) = l\,(0{,}8856032) = -\,0{,}1194862$; die Reihe 12. gilt daher nur so lange, als der Modulus von x weniger als 0,1194862 beträgt; die Gültigkeit der Reihe hat demnach einen sehr engen Spielraum.

Vergleichen wir nun die in der Formel 7. enthaltene Lösung des Umkehrungsproblems mit der vorhergehenden combinatorischen Behandlung desselben, so finden wir zwar eine grössere Uebersichtlichkeit der auszuführenden Rechnungsoperationen und eine scharfe Angabe der Gränzen, innerhalb welcher die Umkehrungsformel richtig bleibt, aber alle die Unbequemlichkeiten, welche den Gebrauch der combinatorischen Entwickelung fast unmöglich machen, treten auch hier wieder auf, wie man aus den nachstehenden Bemerkungen ersehen wird. Die combinatorische Lösung des Problemes und die in der Formel 7. niedergelegte stimmen in so fern überein, als die Umkehrung der Gleichung $x = \psi(y)$ unter der Form

13. $$y_0 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots.$$

dargestellt werden soll und der Unterschied besteht nur darin, dass die erste Behandlung den allgemeinen Koeffizienten A_n durch eine von n abhängige Zahl combinatorischer Operationen und die zweite durch eine $(n-1)$ fache Differenziation zu bestimmen sucht. Es ist aber die eine dieser Rechnungen eben so schwer allgemein auszuführen als die andere, wie der Versuch sogleich zeigt. Für $\frac{y}{\psi(y)} = f(y)$ ist nämlich

$$D\left\{f(y)\right\}^n = n\left\{f(y)\right\}^{n-1} f'(y)$$

$$D^2\left\{f(y)\right\}^n = n\,(n-1)\left\{f(y)\right\}^{n-2}\left\{f'(y)\right\}^2 + n\left\{f(y)\right\}^{n-1} f'(y)\, f''(y)$$

$$D^3\left\{f(y)\right\}^n = n(n-1)(n-2)\left\{f(y)\right\}^{n-3}\left\{f'(y)\right\}^3 + 3n(n-1)\left\{f(y)\right\}^{n-2} f'(y)\,f''(y)$$
$$+ n\left\{f(y)\right\}^{n-1} f'''(y)$$

etc. etc.

und diese Ausdrücke bilden sich nach einem so wenig erkennbaren Gesetze, dass man auf die independente Darstellung von $D^{n-1}\left\{f(y)\right\}^n$ verzichten muss. Nur in den wenigen besonderen Fällen, wo $\frac{y}{\psi(y)}$ ein algebraisches Binom oder eine von den Funktionen e^y, $\cos y$, $\sin y$ ist, glückt es, eine abgerundete Form für A_n zu erhalten.

Aber selbst abgesehen davon, sind schon die Bedingungen, unter welchen die Gleichung 13. einzig und allein bestehen kann, der Art, dass ihr Gebrauch sehr beschränkt ist. Einmal werden durch die Forderung der Stetigkeit und Endlichkeit von

$$\frac{y}{\psi(y)},\ D\left\{\frac{y}{\psi(y)}\right\},\ D^2\left\{\frac{y}{\psi(y)}\right\} \text{ etc.}$$

eine Menge Funktionen ausgeschlossen, wie z. B. $\psi(y) = y\sin y$, $y\tan y$, $\sin^2 y$ etc., für welche $\frac{y}{\psi(y)}$ gleich anfangs bei $y = 0$ eine Unterbrechung der Continuität erleidet, andererseits findet es sich häufig, dass die Gränzen für den Modulus von x in hohem Grade beengend ausfallen; so hat man

für $\psi(y) = l\Gamma(1+y)$, $\mathrm{mod}\, x < 0{,}11949$
„ $\psi(y) = ye^y$, $\mathrm{mod}\, x < 0{,}36788$
„ $\psi(y) = y\cos y$, $\mathrm{mod}\, x < 0{,}66274$

und auch darin liegt ein bedeutender Uebelstand, der sich auf keine Weise wegschaffen lässt. Das Schlimmste endlich ist, dass die Formel 13. immer nur die kleinste Wurzel der Gleichung $x = \psi(y)$ angiebt (für $x = y^2 - 2y$ z. B. $y_0 = 1 - \sqrt{1+x}$), von allen übrigen Wurzeln aber schweigt. Für algebraische Gleichungen könnte man zwar allenfalls mit einer Wurzel zufrieden sein, weil sich nachher die Gleichung durch Division mit $y - y_0$ um einen Grad erniedrigen und dasselbe Verfahren wiederholen liesse, für transcendente Gleichun-

gen dagegen bleibt jener Mangel sehr fühlbar, weil für diese der Satz nicht gilt, dass $y - y_0$ ein Faktor der Gleichung sein muss, wenn y_0 eine ihrer Wurzeln ist; hier kann also keine Dimensionsverringerung erreicht werden und man befindet sich daher gänzlich ausser Stande, die Beschaffenheit der übrigen Wurzeln zu erkennen. —

Da nun die letzten Bemerkungen jedenfalls stehen bleiben, es mag eine independente Koefficientenbestimmung glücken oder nicht, so dürfen wir behaupten, dass die Potenzenreihe 13. keine günstige Form zur Entwickelung von $y = \varphi(x)$ darbietet, und daraus entspringt von selbst die Aufforderung, es einmal mit anderen Formen zu versuchen.

Neue Methoden.

§. 3.

Jede Funktion von $\varphi(x)$ von x, gleichviel ob stetig oder nicht, lässt sich bekanntlich in eine Reihe von der Form

$$14.\quad \varphi(x) = \tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{c} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{c} + A_3 \cos\frac{3\pi x}{c} + \cdots\cdot$$

verwandeln, worin c eine beliebige positive von Null verschiedene Grösse bezeichnet und die Koefficienten A_0, A_1, A_2 etc. mittelst der Formel

$$15.\qquad A_n = \frac{2}{c} \int_0^c \varphi(x) \cos\frac{n\pi x}{c}\, dx$$

bestimmt werden. Die erwähnte Reihenentwickelung gilt so lange, als die Grösse x das willkürlich angenommene Intervall 0 bis c nicht überschreitet *). Hieraus erhellt unmittelbar, dass sich die Form 14. zur Darstellung von Funktionen ganz vorzüglich eignet, da keine Beschränkungen hinsichtlich der Continuität von $\varphi(x)$ und bezüglich des Spielraumes von x statt finden, und wenn wir uns daher der Gleichung 14. zur Entwickelung der Funktion y und x bedienen wollen, d. i.

---

*) M. s. hierüber den zweiten Theil meiner Analytischen Studien.

16. $$x = \psi(y)$$

und umgekehrt

17. $$y = \tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{c} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{c} + \ldots\ldots$$

setzen so wird es nur darauf ankommen, den Koefficienten A_n in 15. unter einer solchen Form darzustellen, dass er aus der gegebenen Funktion $\psi(y)$ unmittelbar abgeleitet werden kann. Diess geschieht sehr leicht auf folgende Weise.

Es ist zunächst wegen $\varphi(x) = y$

$$\int \varphi(x) \cos\frac{n\pi x}{c} dx = \int y \cos\frac{n\pi x}{c} dx$$

und bei theilweiser Integration

$$= y \int \cos\frac{n\pi x}{c} dx - \int dy \int \cos\frac{n\pi x}{c} dx$$

$$= \frac{c}{n\pi} y \sin\frac{n\pi x}{c} - \frac{c}{n\pi} \int dy \,.\, \sin\frac{n\pi x}{c}$$

oder, weil x als Funktion von y gegeben ist (No. 16.)

$$= \frac{c}{n\pi} y \sin\frac{n\pi\,\psi(y)}{c} - \frac{c}{n\pi} \int \sin\frac{n\pi\,\psi(y)}{c} dy$$

Durch beiderseitige Multiplikation mit $\frac{2}{c}$ wird noch

18. $$\frac{2}{c} \int \varphi(x) \cos\frac{n\pi x}{c} dx$$

$$= \frac{2}{n\pi} y \sin\frac{n\pi\,\psi(y)}{c} - \frac{2}{n\pi} \int \sin\frac{n\pi\,\psi(y)}{c} dy$$

und hieraus erhält man A_n, wenn man $x = c$, $x = 0$ setzt und die beiden so entstehenden Gleichungen von einander subtrahirt. Dabei fragt es sich aber noch, welche Werthe an die Stelle von y treten müssen, sobald $x = c$ und $x = 0$ wird, denn auf der rechten Seite der Gleichung 18. bezieht sich die Integration auf y als unabhängige Variable. Nennen wir

γ eine Wurzel der Gleichung $\psi(y) = c$
η „ „ „ „ $\psi(y) = 0$
so ist für $y = \gamma$, $\psi(y) = c$ d. i. $x = c$ und mithin entspricht $y = \gamma$ dem Werthe $x = c$ und ebenso $y = \eta$ dem Werthe $x = 0$. Daher ist nach No. 19

$$\frac{2}{c}\int_0^c \varphi(x) \cos \frac{n\pi x}{c}\, dx \text{ d. h. } A_n$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left\{\gamma \sin \frac{n\pi\psi(y)}{c} - \eta \sin \frac{n\pi\psi(\eta)}{c}\right\} - \frac{2}{n\pi}\int_\eta^\gamma \sin \frac{n\pi\psi(y)}{c}\, dy$$

Die von Integralzeichen freien Glieder verschwinden hier wegen $\psi(y) = c$ und $\psi(y) = 0$ *); daher bleibt nur

$$A_n = -\frac{2}{n\pi}\int_\eta^\gamma \sin \frac{n\pi\psi(y)}{c}\, dy$$

Nun war aber c eine beliebige positive Grösse und daher ist auch γ beliebig, wenn man es nur so wählt, dass dadurch $\psi(\gamma) = c$ einen positiven Werth erhält; setzen wir daher $\psi(\gamma)$ für c, indem wir nun γ unter der genannten Beschränkung willkührlich annehmen, so ist

$$19. \quad A_n = -\frac{2}{n\pi}\int_\eta^\gamma \sin \frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\eta)}\, dy.$$

Einer besonderen Umwandlung bedarf noch der Koefficient A_n, der aus der Gleichung

$$\tfrac{1}{2} A_0 = \frac{1}{c}\int_0^c \varphi(x)\, dx$$

zu bestimmen wäre. Man hat nämlich

---

*) Hierbei ist stillschweigend vorausgesetzt, dass weder c noch η unendlich ist; sollte dagegen z. B. $\eta = \infty$ sein, so würde die Gleichung

$$\eta \sin \frac{n\pi\psi(\eta)}{c} = 0$$

nur dann bestehen, wenn $\eta\,\psi(\eta) = 0$ ist.

$$\int \varphi(x)\,dx = \int y\,dx = yx - \int x\,dy$$

$$= y\,\psi(y) - \int \psi(y)\,dy$$

und durch Multiplication mit $\frac{1}{c} = \frac{1}{\psi(\gamma)}$ und Integration zwischen den Gränzen $x = c$, $x = 0$, welchen wie vorhin die Gränzen $y = \gamma$, $y = \eta$ entsprechen

$$\tfrac{1}{2} A_0 = \gamma - \frac{\eta\pi\psi(\eta)}{\psi(\gamma)} - \frac{1}{\psi(\gamma)} \int_\eta^\gamma \psi(y)\,dy$$

wo das zweite Glied wegen $\psi(\eta) = 0$ wegfällt. Fassen wir nun alles Bisherige zusammen, setzen in No 17. ebenfalls $\psi(\gamma)$ für c, und berücksichtigen endlich, dass die Gültigkeitsbedingung der Gleichung 17. nämlich $c \geqq x \geqq 0$ jetzt in $\psi(\gamma) \geqq x \geqq 0$ übergeht, so haben wir nachstende Lösung unseres Problemes:

„Aus der Gleichung $x = \psi(y)$ folgt umgekehrt

20. $$y = \tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \ldots\ldots$$

„worin die Koefficienten mittelst der Formeln

21. $$\tfrac{1}{2} A_0 = \gamma - \frac{1}{\psi(\gamma)} \int_\eta^\gamma \psi(y)\,dy$$

21. $$A_n = -\frac{2}{n\pi} \int_\eta^\gamma \sin\frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)}\,dy$$

„bestimmt werden. Hierbei ist γ in soweit willkührlich, als nur „verlangt wird, dass $\psi(\gamma)$ positiv ausfalle, η ist eine Wurzel der „Gleichung $\psi(y) = 0$. Die Entwickelungsformel selbst gilt für alle „x, welche nicht ausserhalb des Intervalles $x = 0$ bis $x = \psi(\gamma)$ „liegen."

Der grosse Vortheil, welchen der Gebruuch dieser Formel darbietet, besteht darin, dass sie alle Wurzeln der Gleichung $x = \psi(y)$ liefert; da nämlich für η irgend eine Wurzel der Gleichung $\psi(y) = 0$

gesetzt werden kann, so erhält man für die Koefficienten A soviel verschiedene Werthe, als es verschiedene η giebt. Nennen wir η_1, η_2, $\eta_3, \ldots$ die Wurzeln der Gleichung $\psi(y) = 0$, setzen einmal $\eta = \eta_1$ und $\gamma = \gamma_1$, dann $\eta = \eta_2$ und $\gamma = \gamma_2$ etc., wobei γ_1, γ_2, ebenso beliebig sind wie γ selbst, und bezeichnen endlich die so entstehenden verschiedenen Werthe von A_n mit

$$\overset{I}{A_n},\ \overset{II}{A_n},\ \overset{III}{A_n},\ \overset{IV}{A_n} \text{ etc.}$$

so sind die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $x = \psi(y)$ folgende

$$y_1 = \tfrac{1}{2} \overset{I}{A_0} + \overset{I}{A_1} \cos \frac{\pi x}{\psi(\gamma_1)} + \overset{I}{A_2} \cos \frac{2\pi x}{\psi(\gamma_1)} + \ldots .$$

$$y_2 = \tfrac{1}{2} \overset{II}{A_n} + \overset{II}{A_1} \cos \frac{\pi x}{\psi(\gamma_2)} + \overset{II}{A_2} \cos \frac{2\pi x}{\psi(\gamma_2)} + \ldots .$$

u. s. w.

und diese Gleichungen gelten der Reihe nach unter den Bedingungen

$$\psi(\gamma_1) \geqq x \geqq 0$$

$$\psi(\gamma_2) \geqq x \geqq 0$$

u. s. w.

Es kann auch häufig der Fall vorkommen, dass die Gleichung $\psi(y) = 0$ imaginäre Wurzeln besitzt, wodurch einige der Grössen η_1, $\eta_2, \ldots$ unter der Form $\varkappa + \lambda i$ erscheinen; diess macht aber für unsere Methode weiter keinen Unterschied, als dass die Koefficienten A selbst zu complexen Zahlen werden. Sehr brauchbar ist dann folgende Transformation; man setze, wenn $\eta = \varkappa + \lambda i$, also

$$A_n = -\frac{2}{n\pi} \int_{\varkappa + \lambda i}^{\gamma} \sin \frac{n\varkappa\, \psi(y)}{\psi(\gamma)}\, dy$$

$y = \varkappa + u$, wo u eine neue Variable bezeichnet, es wird so

$$A_n = -\frac{2}{n\pi} \int_{\lambda i}^{\gamma - \varkappa} \sin \frac{n\pi\, \psi(\varkappa + u)}{\psi(\gamma)}\, du$$

wo sich die reellen und imaginären Theile sondern lassen, wenn man das Integrationsintervall von $u = \lambda i$ bis $u = \gamma - \varkappa$ in zwei andere Intervalle zerlegt, von denen das eine nur imaginäre, das andere nur reelle Zahlen umfasst; da die Null der Punkt ist, in welchem sich

die Gebiete der reellen und imaginären Zahlen berühren, so zerlegen wir folgendermassen

$$A_n = -\frac{2}{n\pi}\left\{\int_0^{\gamma-x} \sin\frac{n\pi\,\psi(x+u)}{\psi(\gamma)}\,du + \int_{\lambda i}^0 \sin\frac{n\pi\,\psi(x+u)}{\psi(\gamma)}\,du\right\}$$

und setzen im zweiten Integrale $u = ti$, wodurch dasselbe in

$$\int_\lambda^0 \sin\frac{n\pi\,\psi(x+ti)}{\psi(\gamma)}\,i\,dt = -i\int_0^\lambda \sin\frac{n\pi\,\psi(x+ti)}{\psi(\gamma)}\,dt$$

übergeht. Der Koefficient A_n wird dann:

$$23.\quad A_n = -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\gamma-x} \sin\frac{n\pi\,\psi(x+u)}{\psi(\gamma)}\,du + \frac{2i}{n\pi}\int_0^\lambda \sin\frac{n\pi\,\psi(x+ti)}{\psi(\gamma)}\,dt$$

worin die reelle und die imaginäre Partie getrennt sind.

§. 4.

Bevor wir weiter gehen, wollen wir die allgemeinen Formeln des vorigen Paragraphen auf einige Beispiele anwenden, einmal um den Geist der Methode desto klarer hervortreten zu lassen und dann, um noch einige gelegentliche Bemerkungen anzuknüpfen.

I. Sei zunächst die Gleichung

$$24.\qquad x = y^\mu e^y$$

umzukehren, worin μ eine positive Grösse bezeichnen möge. Nach den Formeln des vorigen Paragraphen ist nun für $\psi(y) = y^\mu e^y$

$$\tfrac{1}{2}A_0 = \gamma - \frac{1}{\gamma^\mu e^\gamma}\int_\eta^\gamma y^\mu e^y\,dy$$

$$A_n = -\frac{2}{n\pi}\int_\eta^\gamma \sin\frac{n\pi\,.\,y^\mu e^y}{\gamma^\mu e^\gamma}\,dy$$

und darin γ beliebig, η eine Wurzel der Gleichung $y^\mu e^y = 0$; diese Gleichung hat jedoch nur eine einzige Wurzel, nämlich $y = 0 = \eta$ und so ist nun, wenn wir noch $\gamma^\mu e^\gamma$ zur Abkürzung mit c bezeichnen

25

$$25.\quad \tfrac{1}{2}A_0 = \gamma - \frac{1}{c}\int_0^\gamma y^\mu e^y\,dy$$

$$26. \quad A_n' = -\frac{2}{n\pi}\int_0^\gamma \sin\left(\frac{n\pi}{c}\, y^\mu\, e^y\right) dy$$

Die Gleichung 24. besitzt demnach nur eine einzige Umkehrung und diese wird durch die Formel

$$27. \quad y = \tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{c} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{c} + \ldots\ldots$$

gegeben, deren Gültigkeit an die Bedingung $c \geqq x \geqq 0$ oder $\gamma^\mu\, e^\gamma \geqq x \geqq 0$ gebunden ist. Hierin liegt übrigens keine drückende Beschränkung, denn da das Produkt $\gamma^\mu\, e^\gamma$ mit γ gleichzeitig ins Unendliche wächst, so kann man dadurch, dass man γ hinreichend gross nimmt, jenes auf x bezügliche Intervall beliebig erweitern.

II. Nicht ohne Interesse ist es, ein ganz verwandtes Beispiel, nämlich die Umkehrung der Gleichung

$$28. \qquad x = y^\mu\, e^{-y}$$

daneben zu stellen, weil hier die Sache wesentlich anders wird. Die Hülfsgleichung $\psi(y) = 0$ besitzt jetzt, wenn y wie vorhin positiv ist, nicht eine, sondern zwei reelle Wurzeln: $y = 0$ und $y = \infty$ oder $\eta_1 = 0$ und $\eta_2 = \infty$. Nehmen wir die entsprechenden beliebigen Werthe von γ, nämlich γ_1 und γ_2, einander gleich, bezeichnen sie mit γ selbst und setzen zur Abkürzung $\psi(\gamma) = \gamma^\mu e^{-\gamma} = c$, so haben wir jetzt für $\eta = \eta_1 = 0$

$$29. \qquad \tfrac{1}{2} \overset{I}{A}_0 = \gamma - \frac{1}{c}\int_0^\gamma y^\mu e^{-\gamma}\, dy$$

$$30. \qquad \overset{I}{A} = -\frac{2}{n\pi}\int_0^\gamma \sin\left(\frac{n\pi}{c}\, y^\mu e^{-y}\right) dy$$

und für $\eta = \eta_2 = \infty$

$$\tfrac{1}{2} \overset{II}{A}_0 = \gamma - \frac{1}{c}\int_\infty^\gamma y^\mu e^{-y}\, dy$$

$$\overset{II}{A}_n = -\frac{2}{n\pi}\int_\infty^\gamma \sin\left(\frac{n\pi}{c}\, y^\mu e^{-y}\right) dy$$

oder besser

$$31.\quad \tfrac{1}{2}\overset{II}{A}_0 = \gamma + \frac{1}{c}\int_{\gamma}^{\infty} y^{\mu} e^{-y}\, dy$$

$$\overset{II}{A}_n = +\frac{2}{n\pi}\int_{\gamma}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{c}\, y^{\mu} e^{-y}\right) dy$$

und nachdem auf diese Weise die Koefficienten bestimmt sind, werden die beiden Umkehrungen der Gleichung 28. durch folgende Formeln gegeben:

$$33.\quad y_1 = \tfrac{1}{2}\overset{I}{A}_0 + \overset{I}{A}_1 \cos\frac{\pi x}{c} + \overset{I}{A}_2 \cos\frac{2\pi x}{c} + \ldots.$$

$$34.\quad y_2 = \tfrac{1}{2}\overset{II}{A}_0 + \overset{II}{A}_1 \cos\frac{\pi x}{c} + \overset{II}{A}_2 \cos\frac{2\pi x}{c} + \ldots..$$

wobei immer $c \geqq x \geqq 0$ d. i. $\gamma^{\mu} e^{-\gamma} \geqq x \geqq 0$ sein muss.

Da hier γ beliebig ist, so kann man noch fragen, welches der vortheilhafteste Werth von γ, d. h. derjenige Werth sei, für den das Intervall 0 bis $\gamma^{\mu} e^{-\gamma}$ seine grösste Ausdehnung erhält. Diese Frage beantwortet sich leicht, indem man nur das Maximum von $\gamma^{\mu} e^{-\gamma}$ oder $y^{\mu} e^{-y}$ aufzusuchen braucht. Man findet, dass letzteres für $\gamma = \mu$ oder $y = \mu$ eintritt und dass sein Werth

$$35.\quad \mu^{\mu} e^{-\mu} = \left(\frac{\mu}{e}\right)^{\mu} = M$$

ist, wo M als Abkürzung dient. Setzen wir also $\gamma = \mu$, wodurch c in M übergeht, so haben wir folgende Formeln:

$$36.\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}\overset{I}{A}_0 = \mu - \dfrac{3}{M}\displaystyle\int_0^{\mu} y^{\mu} e^{-y}\, dy \\ \overset{I}{A}_n = -\dfrac{2}{n\pi}\displaystyle\int_0^{\mu} \sin\left(\dfrac{n\pi}{M}\, y^{\mu} e^{-y}\right) dy \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} \frac{1}{2}\overset{II}{A}_0 = \mu + \frac{1}{M}\int_\mu^\infty y^\mu e^{-y}\, dy \\ \overset{II}{A}_n = + \frac{2}{n\pi}\int_\mu^\infty \sin\left(\frac{n\pi}{M}\, y^\mu e^{-y}\right) dy \end{cases}$$

und

$$38. \quad y_1 = \frac{1}{2}\overset{I}{A}_0 + \overset{I}{A}_1 \cos\frac{\pi x}{M} + \overset{I}{A}_2 \cos\frac{2\pi x}{M} + \ldots.$$

$$39. \quad y_2 = \frac{1}{2}\overset{II}{A}_0 + \overset{II}{A}_1 \cos\frac{\pi x}{M} + \overset{II}{A}_2 \cos\frac{2\pi x}{M} + \ldots.$$

$$M \geqq x \geqq 0.$$

Auch hier liegt in der letzten Bedingung nichts Beschränkendes; denn da M das Maximum von $y^\mu e^{-y}$ d. h. von x ist, so kann überhaupt x nicht grösser als M werden und es würde keinen Sinn haben, für $x > M$ eine Umkehrung der Gleichung $y^\mu e^{-y}$ zu verlangen.

Bemerkenswerth ist noch das Resultat, welches man durch Subtraktion der Gleichungen 38. und 39. erhält; es wird nämlich

$$40. \quad y_2 - y_1 = \left(\frac{1}{2}\overset{II}{A}_0 - \frac{1}{2}\overset{I}{A}_0\right) + \left(\overset{II}{A}_1 - \overset{I}{A}_1\right)\cos\frac{\pi x}{M}$$
$$+ \left(\overset{II}{A}_2 - \overset{I}{A}_2\right)\cos\frac{2\pi x}{M} + \ldots.$$

und dabei ist vermöge der für die Koefficienten getroffenen Bestimmungen

$$\frac{1}{2}\overset{II}{A}_0 - \frac{1}{2}\overset{I}{A}_0 = \frac{1}{M}\left\{\int_0^\mu y^\mu e^{-y}\, dy + \int_\mu^\infty y^\mu e^{-y}\, dy\right\}$$
$$= \frac{1}{M}\int_0^\infty y^\mu e^{-y}\, dy = \frac{\Gamma(\mu+1)}{M}$$

ferner

$$\overset{II}{A}_n - \overset{I}{A}_n = \frac{2}{n\pi}\left\{\int_0^\mu \sin\left(\frac{n\pi}{M}\, y^\mu e^{-y}\right) dy + \int_\mu^\infty \sin\left(\frac{n\pi}{M}\, y^\mu e^{-y}\right) dy\right\}$$
$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^\infty \sin\left(\frac{n\pi}{M}\, y^\mu e^{-y}\right) dy$$

d. i. wenn man für den Sinus die gleichgeltende Reihe setzt

$$\overset{II}{A}_n - \overset{I}{A}_n$$

$$= \frac{2}{n\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{1'} \left(\frac{n\pi}{M} \right) y^{\mu} e^{-y} - \frac{1}{3'} \left(\frac{n\pi}{M} \right)^3 y^{3\mu} e^{-3y} + \ldots \right\} dy$$

wobei überhaupt r' zur Abkürzung für $1.2.3 \ldots r$ dient. Durch Integration der einzelnen Glieder wird hieraus

$$\overset{II}{A}_n - \overset{I}{A}_n$$

$$= \frac{2}{M} \left\{ \frac{\Gamma(\mu+1)}{1'.1^{\mu+1}} - \frac{\Gamma(3\mu+1)}{3'.3^{3\mu+1}} \left(\frac{n\pi}{M} \right)^2 + \frac{\Gamma(5\mu+1)}{5'.5^{5\mu+1}} \left(\frac{n\pi}{M} \right)^4 - \ldots \right\}$$

Setzen wir also zufolge von No. 40. für $M \geqq x \geqq 0$

41. $$M \frac{y_2 - y_1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2} C_0 + C_1 \cos \frac{\pi x}{M} + C_2 \cos \frac{2\pi x}{M} + C_1 \cos \frac{3\pi x}{M} + \ldots$$

so werden die Koefficienten C mittelst der beiden Formeln bestimmt:

42. $$C_0 = \Gamma(\mu + 1)$$

43. $$C_n = \frac{\Gamma(\mu+1)}{1'.1^{\mu+1}} - \frac{\Gamma(3\mu+1)}{3'.3^{3\mu+1}} \left(\frac{n\pi}{M} \right)^2 + \frac{\Gamma(5\mu+1)}{5'.5^{5\mu+1}} \left(\frac{n\pi}{M} \right)^4 - \ldots\ldots$$

So haben wir z. B. für $\mu = 1$, $M = \frac{1}{e}$ und

$$\frac{y_2 - y_1}{2e}$$

$$= \tfrac{1}{2} C_0 + C_1 \cos \pi e x + C_2 \cos 2\pi e x + C_3 \cos 3\pi e x + \ldots\ldots$$

wobei immer $\frac{1}{e} \geqq x \geqq 0$ sein muss und die Koefficienten C mittelst der Formeln

$$C_0 = 1$$

$$C_n = \frac{1}{1^2} - \frac{(n\pi e)^2}{3^4} + \frac{(n\pi e)^4}{5^6} - \frac{(n\pi e)^6}{7^8} + \ldots\ldots$$

gefunden werden. — Man sieht aus diesem nicht uninteressanten Ergebnisse, dass es nach dem hier angegebenen Verfahren nicht schwer hält, Relationen zwischen den verschiedenen Umkehrungen einer Funktion, oder, was Dasselbe ist, zwischen den verschiedenen Wurzeln einer transscendenten Gleichung zu entdecken.

III. Sei noch die Umkehrung der Gleichung

44. $$y^{\mu}(1-y)=x$$

aufzusuchen, worin wir μ als eine positive Grösse, die aber nicht gerade eine ganze Zahl zu sein braucht, voraussetzen wollen. Da hier die Hülfsgleichung $\psi(y)=0$ oder $y^{\mu}(1-y)=0$ zwei reelle Wurzeln besitzt, so erhalten wir wieder zwei Umkehrungen, von denen die eine aus der Supposition $\eta=\eta_1=0$, die zweite aus $\eta=\eta_2=1$ entspringt. Lassen wir wieder γ_1 und γ_2 einander gleich und zwar $=\gamma$ sein, so erhalten wir ähnlich wie vorhin

45. $$\tfrac{1}{2}\overset{I}{A}_0=\gamma-\frac{1}{\gamma^{\mu}(1-\gamma)}\int_0^{\gamma} y^{\mu}(1-y)\,dy$$

46. $$\overset{I}{A}_n=-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\gamma} \sin\frac{n\pi y^{\mu}(1-y)}{\gamma^{\mu}(1-\gamma)}\,dy$$

und

$$\tfrac{1}{2}\overset{II}{A}_0=\gamma-\frac{1}{\gamma^{\mu}(1-\gamma)}\int_1^{\gamma} y^{\mu}(1-y)\,dy$$

$$\overset{II}{A}_n=-\frac{2}{n\pi}\int_1^{\gamma} \sin\frac{n\pi y^{\mu}(1-y)}{\gamma^{\mu}(1-\gamma)}\,dy$$

oder besser

47. $$\tfrac{1}{2}\overset{II}{A}_0=\gamma+\frac{1}{\gamma^{\mu}(1-\gamma)}\int_{\gamma}^{1} y^{\mu}(1-y)\,dy$$

48. $$\overset{II}{A}_n=+\frac{2}{n\pi}\int_{\gamma}^{1} \sin\frac{n\pi y^{\mu}(1-y)}{\gamma^{\mu}(1-\gamma)}\,dy$$

und wenn wir $\gamma^{\mu}(1-\gamma)$ zur Abkürzung mit c bezeichnen, so sind die beiden gesuchten Umkehrungen:

49. $$y_1=\tfrac{1}{2}\overset{I}{A}_0+\overset{I}{A}_1\cos\frac{\pi x}{c}+\overset{I}{A}_2\cos\frac{2\pi x}{c}+\ldots$$

50. $$y_2=\tfrac{1}{2}\overset{II}{A}_0+\overset{II}{A}_1\cos\frac{\pi x}{c}+\overset{II}{A}_2\cos\frac{2\pi x}{c}+\ldots.$$

Diese Gleichungen gelten für $c \geqq x \geqq 0$ oder

$$\gamma^{\mu}(1-\gamma) \geqq x \geqq 0$$

und es ist daher am vortheilhaftesten, γ so zu wählen, dass dass $\gamma^{\mu}(1-\gamma)$ dadurch sein Maximum erreicht. Dieses tritt ein für

$$51. \qquad \gamma = \frac{\mu}{\mu+1}$$

und sein Betrag, der M heissen möge, ist

$$52. \qquad M = \frac{\mu^{\mu}}{(\mu+1)^{\mu+1}}$$

Geben wir also den in No. 51. verzeichneten speziellen Werth, so geht $c = \gamma^{\mu}(1-\gamma)$ in M über und wir haben

$$53. \begin{cases} \frac{1}{2}\overset{I}{A}_0 = \gamma - \frac{1}{M}\int_0^{\gamma} y^{\mu}(1-y)\,dy \\ \overset{I}{A}_n = -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\gamma} sin\left\{\frac{n\pi}{M}\,y^{\mu}(1-y)\right\}dy \end{cases}$$

$$54. \begin{cases} \frac{1}{2}\overset{II}{A}_0 = \gamma + \frac{1}{M}\int_{\gamma}^{1} y^{\mu}(1-y)\,dy \\ \overset{II}{A}_n = +\frac{2}{n\pi}\int_{\gamma}^{1} sin\left\{\frac{n\pi}{M}\,y^{\mu}(1-y)\right\}dy \end{cases}$$

für die so bestimmten Koefficienten gelten nun unter der Bedingung $c \geqq x \geqq 0$ d. h. $M \geqq x \geqq 0$ die Gleichungen

$$55. \quad y_1 = \frac{1}{2}\overset{I}{A}_0 + \overset{I}{A}_1 \cos\frac{\pi x}{M} + \overset{I}{A}_2 \cos\frac{2\pi x}{M} + \ldots\ldots$$

$$56. \quad y_2 = \frac{1}{2}\overset{II}{A}_0 + \overset{II}{A}_1 \cos\frac{\pi x}{M} + \overset{II}{A}_2 \cos\frac{2\pi x}{M} + \ldots\ldots$$

welche durch die vorher genannte Bedingung nicht beschränkt sind, da x nicht grösser als sein Maximum M werden kann und folglich für $x > M$ wenigstens keine reelle Umkehrung existirt.

Subtrahirt man die Gleichung 55. von ihrer Nachfolgerin und setzt für $M \geqq x \geqq 0$

$$57. \qquad M\,\frac{y_2 - y_1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2} C_0 + C_1 \cos \frac{\pi x}{M} + C_2 \cos \frac{2\pi x}{M} + C_3 \cos \frac{3\pi x}{M} + \ldots\ldots$$

so ist, wie man unmittelbar einsieht,

$$C_0 = M \left\{ \tfrac{1}{2} \overset{II}{A_0} - \tfrac{1}{2} \overset{I}{A_0} \right\}$$

d. i. vermöge der Werthe von $\overset{II}{A_0}$ und $\overset{I}{A_0}$

$$C_0 = \int_0^\gamma y^\mu (1-y)\, dy + \int_\gamma^1 y^\mu (1-y)\, dy$$

$$= \int_0^1 y^\mu (1-y)\, dy$$

und wenn man hier die bekannten Formeln

$$\int_0^1 y^{p-1} (1-y)^{q-1}\, dy = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

und

$$\Gamma(r+m) = r(r+1)(r+2)\ldots(r+m-1)\,\Gamma(r)$$

in Anwendung bringt

58. $$C_0 = \frac{1}{(\mu+1)(\mu+2)}$$

ferner hat man vermöge der Werthe von $\overset{II}{A_n}$ und $\overset{I}{A_n}$

$$C_n = \frac{M}{2} \left\{ \overset{II}{A_n} - \overset{I}{A_n} \right\}$$

$$= \frac{M}{n\pi} \int_0^1 \sin \left\{ \frac{n\pi}{M}\, y^\mu (1-y) \right\} dy$$

d. i. wenn man für den Sinus die gleichgeltende Reihe setzt

$$C_n =$$

$$\int_0^1 \left\{ \frac{1}{1'}\, y^\mu (1-y) - \frac{1}{3'} \left(\frac{n\pi}{M} \right)^2 y^{3\mu} (1-y)^3 + \ldots\ldots \right\} dy$$

d, i. unter Anwendung der obigen Formeln aus der Theorie der Gammafunktionen

$$\frac{1}{1'} \frac{\Gamma(2)}{(\mu+1)(\mu+2)} \left(\frac{n\pi}{M} \right)^2 - \frac{1}{3'} \frac{\Gamma(4)}{(3\mu+1)(3\mu+2)(3\mu+3)(3\mu+4)} + \ldots$$

oder endlich weil immer $\Gamma(m) = m'$ ist,

$$59. \quad C_n = \frac{1}{(\mu+1)(\mu+2)} - \frac{1}{(3\mu+1)(3\mu+2)(3\mu+3)(3\mu+4)}\left(\frac{n\pi}{M}\right)^2 + \frac{1}{(5\mu+1)(5\mu+2)\ldots(5\mu+6)}\left(\frac{n\pi}{M}\right)^4 - \ldots\ldots$$

womit nun sämmtliche Koefficienten der Reihe 57. bestimmt sind.

In dem speziellen Falle $\mu = 1$ lassen sich die Umkehrungen unserer Funktion geradezu finden und man erhält durch Auflösung der quadratischen Gleichung $y(1-y) = x$

$$y_1 = \tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4} - x}$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} - x}$$

Substituirt man diess in die Gleichung 57. mit der Rücksicht, dass nach No. 52. $M = \frac{1}{4}$ ist, so muss jetzt die Gleichung

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{4} - x}$$
$$= \tfrac{1}{2}C_0 + C_1 \cos 4\pi x + C_2 \cos 8\pi x + C_3 \cos 12\pi x + \ldots.$$
$$\tfrac{1}{4} \geqq x \geqq 0$$

statt finden, welche für $x = \frac{z}{4\pi}$ in die etwas einfachere

$$60. \qquad \tfrac{1}{8}\sqrt{1 - \frac{z}{\pi}}$$
$$= \tfrac{1}{2}C_0 + C_1 \cos z\, C_2 \cos 2z + C_3 \cos 3z + \ldots.$$
$$\pi \geqq z \geqq 0$$

übergeht und worin jetzt nach No. 59. der allgemeine Koefficient ist:

$$61. \quad C_n = \frac{1}{2.3} - \frac{(4n\pi)^2}{4.5.6.7} + \frac{(4n\pi)^4}{6.7\ldots.11} - \frac{(4n\pi)^6}{8.9\ldots.15} + \ldots\ldots$$

Man wird vielleicht eine directe Bestätigung dieses Resultates nicht ungern sehen und wir wollen sie daher noch mittheilen. Setzt man in den Gleichungen 14. und 15. $c = \pi$, C und z an die Stelle von A und x, so erhellt, dass die Gleichung 60. nur bestehen kann, wenn

$$C_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \tfrac{1}{8}\sqrt{1 - \tfrac{z}{\pi}}\, \cos nz\, dz$$

ist. Führen wir eine neue Variable u ein, indem wir $z = \pi u$ sezzen, so wird

$$C_n = \tfrac{1}{4}\int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}} \cos n\pi u\, du$$

$$= \tfrac{1}{4}\int_0^1 (1-u)^{\frac{3}{2}-1} \left\{ 1 - \frac{(n\pi u)^2}{2'} + \frac{(n\pi u)^4}{4'} - \ldots \right\} du$$

hier kann man die einzelnen Glieder nach der schon vorhin benutzten Gammafunktionenformel integriren und erhält

$$C_n = \tfrac{1}{4}\left\{ \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{5}{2})} - \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{9}{2})}\frac{(n\pi)^2}{2'} + \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(5)}{\Gamma(\frac{13}{2})}\frac{(n\pi)^5}{4'} - \ldots \right\}$$

oder auch

$$C_n = \tfrac{1}{4}\left\{ \frac{2^1}{1.3} - \frac{2^3(n\pi)^2}{1.3.5.7} + \frac{2^5(n\pi)^4}{1.3.5.7.9.11} - \ldots \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{ \frac{1}{1.3} - \frac{(2n\pi)^2}{1.3.5.7} + \frac{(2n\pi)^4}{1.3.5.7.9.11} - \ldots \right\}$$

Die Uebereinstimmung dieses Werthes von C_n mit dem vorhin in No. 61. entwickelten giebt eine einfache Vergleichung auf der Stelle zu erkennen.

IV. Wenden wir unser Verfahren auf eine algebraische Gleichung vom Grade μ etwa auf die folgende

$$62. \quad a_0\,{}^{\mu} + a_1 y^{\mu-1} + a_2 y^{\mu-2} + \ldots + a_{\mu-1}\, y = x$$

an, worin wir der Allgemeinheit unbeschadet x immer als positiv ansehn dürfen, so gestalten sich die Sachen ganz ähnlich wie vorhin. Zunächst sind nämlich die Wurzeln der Gleichung

$$a_0 y^{\mu} + a_1 y^{\mu-1} + a_2 y^{\mu-2} + \ldots + a_{\mu-1} = 0$$

aufzusuchen; von diesen kennt man eine, nämlich $y = \eta_1 = 0$ bereits und die anderen finden sich durch die Auflösung der Gleichung

$$63. \quad a_0 y^{\mu-1} + a_1 y^{\mu-2} + \ldots + a_{\mu-1} = 0$$

Nennt man ferner γ denjenigen speziellen Werth von y, für welchen die linke Seite der Gleichung 62. ihren grössten positiven Werth erreicht und M dieses Maximum selbst, so ergeben sich sämmtliche Umkehrungen der Gleichung 63. aus den Formeln

$$64. \begin{cases} \frac{1}{2} A_0 = \gamma - \frac{1}{M} \int_\eta^\gamma \psi(y)\, dy \\ A_n = - \frac{2}{n\pi} \int_\eta^\gamma \sin \frac{n\pi\, \psi(y)}{M}\, dy \end{cases}$$

$$65. \begin{cases} y = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \frac{\pi x}{M} + A_2 \cos \frac{2\pi x}{M} + \dots \\ M \geqq x \geqq 0 \end{cases}$$

wenn man für $\psi(y)$ die linke Seite der Gleichung 62. und für η erst die Null und darauf die Wurzeln der Gleichung 63. substituirt. Man erkennt also, dass sich sämmtliche Wurzeln der Gleichung 62. angeben lassen, sobald man die Wurzeln der um einen Grad niedrigeren Gleichung 63. finden kann und folglich ist diese Entwickelung zugleich eine Lösung des allgemeinen Problemes: „die Wurzeln einer algebraischen Gleichung μten Grades durch die Wurzeln einer Gleichung ($\mu-1$)ten Grades auszudrücken.“

§. 5.

Eine zweite Auflösung des Umkehrungsproblemes wollen wir aus dem Satze herleiten, dass sich jede Funktion $\varphi(x)$ in eine Reihe von der Form

$$66. \quad \varphi(x) = B_1 \sin \frac{\pi x}{c} + B_2 \sin \frac{2\pi x}{c} + B_3 \sin \frac{3\pi x}{c} + \dots$$

verwandeln lässt, worin die Koefficienten B mittelst der Formel

$$67. \qquad B_n = \frac{2}{c} \int_0^c \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{c}\, dx$$

bestimmt werden. Dabei ist c eine willkürliche positive von Null verschiedene Grösse und die Reihenentwickelung gilt für jedes innerhalb des Intervalles 0 bis c liegende x, für $x = 0$ oder $x = c$ jedoch nur dann, wenn zufällig $\varphi(0) = 0$ oder $\varphi(c) = 0$ sein sollte. — Sehen wir wieder $\varphi(x) = y$ als eine Umkehrung der Gleichung $x = \psi(y)$ an, so ist

$$\int \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{c}\, dx = \int y \sin \frac{n\pi x}{c}\, dy$$

$$= -\frac{c}{n\pi}\, y \cos\frac{n\pi x}{c} + \frac{c}{n\pi}\int dy \cos\frac{n\pi x}{c}$$

$$= -\frac{c}{n\pi}\, y \cos\frac{n\pi\,\psi(y)}{c} + \frac{c}{n\pi}\int \cos\frac{n\pi\,\psi(y)}{c}\, dy$$

und hieraus erhalten wir B_n durch Multiplication mit $\frac{2}{c}$ und Integration zwischen den Gränzen $x = c$ und $x = 0$. Diesen Werthen von x entsprechen, ganz wie im §. 3. die Werthe $y = \gamma$ und $y = \eta$, wobei γ eine Wurzel der Gleichung $\psi(y) = c$, oder, wegen der Willkührlichkeit von c, in so weit beliebig ist, als $\psi(\gamma)$ nur positiv zu sein braucht, und η eine Wurzel der Gleichung $\psi(y) = 0$ bedeutet. Wir haben daher für $c = \psi(\gamma)$ und wenn wir einmal $y = \gamma$, dann $y = \eta$ setzen und subtrahiren

$$\frac{2}{c}\int_0^c \varphi(x) \sin\frac{n\pi x}{c}\, dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left\{-\gamma \cos n\pi + \eta\right\} + \frac{2}{n\pi}\int_\eta^\gamma \cos\frac{n\pi\,\psi(y)}{\psi(\gamma)}\, dy$$

oder auch

$$68.\quad B_n = \frac{2}{n\pi}\left\{(-1)^{n+1}\gamma + \eta\right\} + \frac{2}{n\pi}\int_\eta^\gamma \cos\frac{n\pi\,\psi(y)}{\psi(\gamma)}\, dy$$

für die so bestimmten Werthe der Koeffizienten B und unter der Bedingung $c > x > 0$ d. h. $\psi(\gamma) > x > 0$ gilt nun die Gleichung 66. oder:

$$69.\quad y = B_1 \sin\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + B_2 \sin\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + B_3 \sin\frac{3\pi x}{\psi(\gamma)} + \ldots.$$

Man erhält aus ihr sämmtliche Umkehrungen der Gleichung $x = \psi(y)$, wenn man für η der Reihe nach alle Wurzeln der Gleichung $\psi(y) = 0$ substituirt, wobei man auch dem γ verschiedene Werthe geben kann.

Auf den ersten Anblick möchte man geneigt sein, die obige Umkehrungsformel für unbequemer als die in §. 4 entwickelte zu halten, weil der Koeffizient B_n aus mehreren Theilen besteht, während A_n ein blosses Integral war. Diese Unbequemlichkeit ist jedoch nur schein-

bar, weil sich diejenigen Reihen, welche aus dem vom Integralzeichen freien Bestandtheilen des B_n entspringen, leicht summiren lassen. Sezzen wir nämlich

$$70. \quad B_n = \frac{2\gamma}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2\eta}{\pi} \frac{1}{n} + C_n$$

wo nun C_n durch die Formel

$$71. \quad C_n = \frac{2}{n\pi} \int_\eta^\gamma \cos \frac{n\pi\,\psi(y)}{\psi(\gamma)} \, dy$$

bestimmt ist, so erhalten wir für y folgenden Ausdruck

$$y = \frac{2\gamma}{\pi} \left\{ \frac{1}{1} \sin \frac{\pi x}{\psi(\gamma)} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{\psi(\gamma)} - \ldots\ldots \right\}$$
$$+ \frac{2\eta}{\pi} \left\{ \frac{1}{1} \sin \frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{\psi(\gamma)} + \ldots\ldots \right\}$$
$$+ C_1 \sin \frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + C_2 \sin \frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + C_3 \sin \frac{3\pi x}{\psi(\gamma)} + \ldots.$$

Nun gelten aber für $\pi > u > 0$ bekanntlich die Formeln

$$\tfrac{1}{2} u = \sin u - \tfrac{1}{2} \sin 2u + \tfrac{1}{3} \sin 3u - \ldots$$
$$\tfrac{1}{2} (\pi - u) = \sin u + \tfrac{1}{2} \sin 2u + \tfrac{1}{3} \sin 3u + \ldots..$$

Benutzen wir dieselben für $u = \frac{\pi x}{\psi(\gamma)}$, was wegen der Bedingung $\psi(\gamma) > x > 0$ erlaubt ist, so erhalten wir jetzt folgende Umkehrungsformel:

$$27. \quad y = \eta + \frac{\gamma - \eta}{\psi(\gamma)} x$$
$$+ C_1 \sin \frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + C_2 \sin \frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + C_3 \sin \frac{3\pi x}{\psi(\gamma)} + \ldots.$$

wo nun die mit C bezeichneten Koeffizienten nach der Formel 71. zu bestimmen sind und die Bedingung $\psi(\gamma) > x > 0$ erfüllt sein muss.

In der vorstehenden Form ist unsere Umkehrungsgleichung sehr brauchbar, sobald nur kein η unendlich gross ausfällt, wie z. B. für $\psi(y) = y^\mu e^{-y}$.

§. 6.

Als Beispiel für die soeben entwickelte Umkehrungsformel benuzzen wir den Fall $\psi(y) = y - \varepsilon \sin y$, wo es sich also um Auflösung der transscendenten Gleichung

73. $$y - \varepsilon \sin y = x$$

handelt, in welcher wir ε als einen positiven ächten Bruch voraussezzen wollen. Die Hülfsgleichung $\psi(y) = 0$ hat unter diesen Umständen nur eine einzige reelle Wurzel nämlich, $y = \eta = 0$; nehmen wir ausserdem $\gamma = \pi$, wodurch $\psi(\gamma)$ ebenfalls $= \pi$ wird, so ist jetzt

74. $$y = x + C_1 \sin x + C_2 \sin 2x + C_3 \sin 3x + \ldots.$$
$$\pi > x > 0$$

und dabei gilt für die Koeffizienten die Bestimmung:

$$C_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos(ny - n\varepsilon \sin y)\, dy$$

oder

75. $$C_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin(n\varepsilon \sin y) \sin ny\, dy + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos(n\varepsilon \sin y) \cos ny\, dy.$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich bedeutend, wenn man auf die Unterscheidung von ungeraden und geraden n Achtung giebt. Im ersten Falle ist zunächst

$$\int_0^\pi \cos(n\varepsilon \sin y) \cos ny\, dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(n\varepsilon \sin y) \cos ny\, dy + \int_{\frac{1}{2}\pi}^\pi \cos(n\varepsilon \sin y) \cos ny\, dy$$

und wenn man im ersten Integrale rechts $y = z$, im zweiten $y = \pi - z$ setzt, wodurch $\cos ny = -\cos nz$ und $dz = -dz$ wird, so ergiebt sich für die rechte Seite der Ausdruck

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(n\varepsilon \sin z) \cos nz\, dz + \int_{\frac{1}{2}\pi}^0 \cos(n\varepsilon \sin z) \cos nz\, dz = 0$$

Für ungerade n verschwindet also das zweite Integral in No. 75. und es bleibt

76. $$C_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin(n\varepsilon \sin y) \sin ny\, dy \qquad , (n \text{ ungerade}).$$

Wendet man genau dieselbe Zerlegung und Transformation für den

Fall eines geraden n auf das erste Integral in No. 75. an, so findet man, dass jetzt dieses wegfällt und übrig bleibt:

$$77. \quad C_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\varepsilon \sin y)\cos ny\,dy \qquad , (n \text{ gerade}).$$

Die Integrale in 76. und 77. lassen sich übrigens auf eine gemeinschaftliche Form bringen und zwar durch folgende Umwandlungen. Wir setzen zunächst $y = \frac{1}{2}\pi + z$, so wird für ungerade n

$$C_n = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \sin(n\varepsilon\cos z)\cos nz\,dz$$

und für gerade n

$$C_n = \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \cos(n\varepsilon\cos z)\cos nz\,dz.$$

Da überhaupt eine Funktion wie $f(\cos z)\cos nz$ für negative Werthe von z ungeändert bleibt, so giebt auch die Integration zwischen den Gränzen $z = 0$ und $z = -\frac{1}{2}\pi$ Dasselbe wie die Integration von $z = 0$ bis $z = +\frac{1}{2}\pi$, und der Betrag einer von $z = -\frac{1}{2}\pi$ bis $z = +\frac{1}{2}\pi$ ausgedehnten Integration ist demnach das Doppelte von Dem, was die Integration zwischen den Gränzen $z = 0$ bis $z = -\frac{1}{2}\pi$ liefert; wir haben daher für ungerade n

$$C_n = \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(n\varepsilon\cos z)\cos nz\,dz$$

und für gerade n

$$C_n = \frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(n\varepsilon\cos z)\cos nz\,dz.$$

Statt dieser Formeln kann man auch die folgenden setzen:

$$78. \quad C_n = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin(n\varepsilon\cos z)\cos nz\,dz$$

$$79. \quad C_n = \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\int_0^{\pi} \cos(n\varepsilon\cos z)\cos nz\,dz$$

wie man leicht erkennt, sobald man das Intervall 0 bis π in die beiden Intervalle 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ bis π zerlegt, und in den auf das letztere Intervall bezogenen Integralen die Substitution $z = \pi - z'$ vornimmt. Auf die letzten beiden Integrale ist nun ein schönes Theorem anwendbar, welches man dem berühmten Verfasser der *fundamenta nova funct. ellipt.* verdankt, und wonach jederzeit

$$80. \quad \int_0^\pi f(\cos z) \cos nz \, dz = \frac{1}{1.3.5\ldots(2n-1)} \int_0^\pi f^{(n)}(\cos z) \sin^{2n} z \, dz$$

sein muss. Benutzen wir diese merkwürdige Transformation für die in 78. und 79. vorkommenden Integrale, so haben wir zuerst

$$f(u) = \sin (n\varepsilon u) \quad \text{also} \quad f^{(n)}(u) = (n\varepsilon)^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + n\varepsilon u\right)$$

d. i. weil hier n ungerade ist

$$f^{(n)}(u) = (n\varepsilon)^n \sin \frac{n\pi}{2} \cos (n\varepsilon u)$$

und zweitens

$$f(u) = \cos (n\varepsilon u) \quad , \quad f^{(n)}(u) = (n\varepsilon)^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + n\varepsilon u\right)$$

oder wegen des geraden n

$$f^{(n)}(u) = (n\varepsilon)^n \cos \frac{n\pi}{2} \cos (n\varepsilon u)$$

Substituiren wir diess für $u = \cos z$ in die Formel 80. so erhalten wir für ungerade n:

$$\int_0^\pi \sin (n\varepsilon \cos z) \cos nz \, dz$$

$$= \frac{(n\varepsilon)^n}{1.3.5\ldots(2n-1)} \sin \frac{n\pi}{2} \int_0^\pi \cos (n\varepsilon \cos z) \sin^{2n} z \, dz$$

und für gerade n

$$\int_0^\pi \cos (n\varepsilon \cos z) \cos nz \, dz$$

$$= \frac{(n\varepsilon)^n}{1.3.5\ldots(2n-1)} \cos \frac{n\pi}{2} \int_0^\pi \cos (n\varepsilon \cos z) \sin^{2n} z \, dz$$

Hierdurch ziehen sich die Formeln 78. und 79. zu einer einzigen zusammen

$$C_n = \frac{2}{n\pi}\frac{(n\varepsilon)^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^{\pi} \cos(n\varepsilon\cos z)\sin^{2n} z\, dz$$

oder wie leicht zu sehen ist

$$81.\quad C_n = \frac{4}{n\pi}\frac{(n\varepsilon)^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(n\varepsilon\cos z)\sin^{2n} z\, dz.$$

Die Ausführung der vorstehenden Integration hat nicht die mindeste Schwierigkeit; denn setzen wir für $\cos v$ die bekannte Reihe, was kurz mit

$$\cos v = \Sigma\frac{(-1)^k v^{2k}}{(2k)'}\quad,\quad k = 0,1,2,3,\ldots.$$

bezeichnet werden möge, so ist

$$C_n = \frac{4}{n\pi}\frac{(n\varepsilon)^n}{1.3\ldots(2n-1)}\Sigma\frac{(-1)^k(n\varepsilon)^{2k}}{(2k)'}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2n} z\cos^{2k} z\, dz$$

für $z^2 = x$ verwandelt sich das Integral folgendermassen

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2n} z\cos^{2k} z\, dz = \int_0^1 x^n(1-x)^k\frac{dx}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 x^{n+\frac{1}{2}-1}(1-x)^{k+\frac{1}{2}-1}\, dx = \tfrac{1}{2}\,\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+k+1)}$$

$$= \tfrac{1}{2}.\frac{1.3.5\,(2n-1)\sqrt{\pi}.1.3.5\ldots(2k-1)\sqrt{\pi}}{2^n.(n+k)'\ .\ 2^k}$$

Hierdurch ergiebt sich für C_n die Formel

$$C_n = \frac{2}{n}(n\varepsilon)^n\,\Sigma\,\frac{(-1)^k(n\varepsilon)^{2k}}{(2k)'}\,\frac{1.3.5\ldots(2k-1)}{2^{n+k}(n+k)'}$$

d. i. nach einiger Hebung

$$82.\quad C_n = \frac{2}{n}\frac{(\frac{1}{2}n\varepsilon)^n}{n'}\,\Sigma\,\frac{(-1)^k(\frac{1}{2}n\varepsilon)^{2k}}{k'.(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}$$

Schreiben wir 2ε für ε, wo nun das neue $\varepsilon < \frac{1}{2}$ sein muss, so ist nach 73., 74. und 82., die reelle Wurzel der Gleichung

$$83.\qquad y - 2\varepsilon\sin y = x\quad,\quad \tfrac{1}{2} > \varepsilon > 0$$

mittelst der Formel bestimmt

$$84.\ \begin{cases} y = x + C_1 \sin x + C_2 \sin 2x + C_3 \sin 3x + \dots \\ \pi > x > 0 \end{cases}$$

und darin

$$85.\ C_n = \frac{2}{n}\frac{(n\varepsilon)^n}{n'}\left\{1 - \frac{(n\varepsilon)^2}{1'.(n+1)} + \frac{(n\varepsilon)^4}{2'.(n+1)(n+2)} - \dots\right\}$$

für die speziellen Fälle $x=0$ und $x=\pi$ giebt die Formel 84. $y=0$ und $y=\pi$, was in der That richtig ist; da ferner einem negativen x ein gleichgrosses nur negatives y entsprechen muss, wie einem positiven x, so gilt die Formel zufällig auch noch für negative x; das Intervall für x lässt sich also von $x=-\pi$ bis $x=+\pi$ erweitern.

§. 7.

Die Methode, deren wir uns in den §§. 3. und 5. zur Umkehrung willkührlicher Funktionen bedient haben, bietet den grossen Vortheil, mit völlig gleicher Leichtigkeit auf das allgemeinere Problem anwendbar zu sein, wo man aus $x=\psi(y)$ nicht y selbst, sondern eine gegebene Funktion von y, etwa $f(y)$, entwickelt wissen will. Setzen wir nämlich $f(y)$ d. h.

$$86.\quad f[\varphi(x)] = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos\frac{\pi x}{c} + A_2 \cos\frac{2\pi x}{c} + \dots$$

so ist

$$A_n = \frac{2}{c}\int_0^c f[\varphi(x)]\,\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx$$

und hier lässt sich der Koeffizient A_n auf ähnliche Weise wie früher transformiren. Man hat nämlich

$$\int f[\varphi(x)]\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx = \int f(y)\,\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx$$

$$= f(y)\int\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx - \int f'(y)\,dy\int\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx$$

$$= \frac{c}{n\pi}f(y)\sin\frac{n\pi x}{c} - \frac{c}{n\pi}\int f'(y)\,dy\,\sin\frac{n\pi x}{c}$$

führen wir die Gränzen $x = c$, $x = 0$ ein, denen in Beziehung auf y die Gränzen $y = \gamma$ und $y = \eta$ entsprechen, so verschwinden die vom Integralzeichen freien Glieder, vorausgesetzt nämlich, dass weder $f(y)$ noch $f(\eta)$ unendlich ist; durch Multiplikation mit $\frac{2}{c}$ findet man nachher, indem für x und c die Ausdrücke $\psi(y)$ und $\psi(\gamma)$ gesetzt werden,

$$87. \quad A_n = -\frac{2}{n\pi}\int_\eta^\gamma f'(y) \sin \frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)}\, dy$$

wo nun wieder η eine Wurzel der Gleichung $\psi(y) = 0$ und γ in so weit beliebig ist, als $\psi(\gamma)$ nur positiv zu sein braucht. Für den Koeffizienten A_0 hat man durch besondere ebenso leichte Transformation

$$88. \quad \tfrac{1}{2}A_0 = f(\gamma) - \frac{1}{\psi(\gamma)}\int_\eta^\gamma f'(y)\,\psi(y)\, dy$$

und für die somit bestimmten Koeffizienten gilt nun die Gleichung 86. d. h.

$$89. \quad f(y) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos \frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + A_2 \cos \frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \ldots.$$

$$\psi(\gamma) \geqq x \geqq 0.$$

Wollen wir dagegen die Funktion $f(y)$ nicht in eine nach Cosinus, sondern nach Sinus fortgehende Reihe verwandeln, so haben wir für $c > x > 0$

$$90. \quad f[\varphi(x)] = B_1 \sin \frac{\pi x}{c} + B_2 \sin \frac{2\pi x}{c} + B_3 \sin \frac{3\pi x}{c} + \ldots..$$

zu setzen, worin

$$B_n = \frac{2}{c}\int_0^c f[\varphi(x)] \sin \frac{n\pi x}{c}\, dx$$

ist. Die Transformation von B_n geht dann folgendermassen vor sich:

$$\int f[\varphi(x)] \sin \frac{n\pi x}{c}\, dx = \int f(y) \sin \frac{n\pi x}{c}\, dx$$

$$= -\frac{c}{n\pi} f(y) \cos\frac{n\pi x}{c} + \frac{c}{n\pi}\int f'(y)\,dy \cos\frac{n\pi x}{c}$$

Durch Einführung der Gränzen $x = c$, $x = 0$ d. i. $y = \gamma$, $y = \eta$ und Multiplikation mit $\frac{2}{c}$ wird hieraus

$$B_n = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} f(\gamma) + \frac{2}{n\pi} f(\eta) + \frac{2}{n\pi}\int_\eta^\gamma f'(y) \cos\frac{n\pi\,\psi(y)}{\psi(\gamma)}\,dy$$

oder

$$B_n = \frac{2 f(\gamma)}{\pi}\,\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2 f(\eta)}{\pi}\,\frac{1}{n} + C_n$$

wenn wir zur Abkürzung setzen

$$91. \quad C_n = \frac{2}{n\pi}\int_\eta^\gamma f'(y) \cos\frac{n\pi\,\psi(y)}{\psi(\gamma)}\,dy$$

Die Reihe 90. nimmt nun für $c = \psi(\gamma)$ und wegen der obigen Bestimmung von B_n folgende Form an

$$f(y) = \frac{2 f(\gamma)}{\pi}\left\{\frac{1}{1}\sin\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \ldots\ldots\right\}$$
$$+ \frac{2 f(\eta)}{\pi}\left\{\frac{1}{1}\sin\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \ldots\ldots\right\}$$
$$+ C_1 \sin\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + C_2 \sin\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + C_3 \sin\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \ldots\ldots$$

und durch Summirung der beiden ersten Reihen

$$92. \quad f(y) = f(\eta) + \frac{f(\gamma) - f(\eta)}{\psi(\gamma)}\,x$$
$$+ C_1 \sin\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + C_2 \sin\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + C_3 \sin\frac{3\pi x}{\psi(\gamma)} + \ldots$$

wobei nun $\psi(\gamma) > x > 0$ sein muss. Für $x = 0$ liefert die Formel das Resultat $f(y) = f(\eta)$, was richtig ist, weil y für $x = 0$ in η übergeht; für $x = \psi(\gamma)$ erhält man ebenfalls richtig $f(y) = f(\gamma)$ und daher gilt die Gleichung 92. unter der weiteren Bedingung $\psi(\gamma) \geqq x \geqq 0$.

Beispiele hierzu lassen sich leicht geben; so wäre für die Formeln 87., 88. und 89. die Annahme

$$\psi(y) = y - \varepsilon \sin y = x$$

und $$f(y) = a\,(1 - \varepsilon \cos y) = r$$

eine sehr passende; es findet sich dann für $\gamma = \pi$

$$r = \tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \ldots$$

wo die Koefficienten sind

$$A_0 = a\,(2 + \varepsilon^2)$$

und

$$A_n = \frac{2a\varepsilon}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin y \sin(ny - n\varepsilon \sin y)\, dy$$

Dieses Integral ist ganz ähnlicher Transformationen fähig, wie das in No. 75. betrachtete, die wir aber hier nicht ausführen wollen, weil einestheils die Sache keine Schwierigkeiten hat, und man ausserdem das Endresultat durch Bessel's Untersuchung schon kennt; es findet sich nämlich

$$\begin{aligned} A_n = -\frac{a n^{n-2} \varepsilon^n}{2^{n-1} n'} \Big\{ n &- \frac{n+2}{1'.(n+1)} (\tfrac{1}{2} n\varepsilon)^2 \\ &+ \frac{n+4}{2'.(n+1)(n+2)} (\tfrac{1}{2} n\varepsilon)^4 \\ &- \frac{n+6}{3'.(n+1)(n+2)(n+3)} (\tfrac{1}{2} n\varepsilon)^6 + \ldots \Big\} \end{aligned}$$

und damit ist das Problem gelöst, den Radius Vektor eines Planeten direkt durch die mittlere Anomalie auszudrücken *).

§. 8.

Die Formeln des vorigen Paragraphen geben noch ein bequemes Mittel zur Berechnung solcher bestimmter Integrale

$$\int_{y_1}^{y_2} F(x)\, dx$$

deren Integrationsgränzen y_1 und y_2 nicht unmittelbar bekannt, sondern zwei Wurzeln einer Gleichung $\psi(y) = x$ sind. Es verdient diese Anwendung vielleicht um so mehr Interesse, als bis jetzt keine Me-

---

*) Supplemente zum mathematischen Wörterbuche, erste Abtheil., S. 260.

thode zur Lösung dieser anscheinend sehr schweren Aufgabe vorhanden war.

I. Setzen wir zunächst in den Formeln 87., 88. und 89.

93. $$f(y) = \int_a^y F(x)\,dx$$

wobei a eine beliebige Konstante bezeichnen möge, so ist

$$f'(y) = F(y)$$

und nun wird aus 86. und 87.

94. $$\tfrac{1}{2}A_0 = \int_a^\gamma F(x)\,dx - \frac{1}{\psi(\gamma)}\int_\eta^\gamma F(y)\,\psi(y)\,dy$$

95. $$A_n = -\frac{2}{n\pi}\int_\eta^\gamma F(y)\sin\frac{n\pi\,\psi(y)}{\psi(\gamma)}\,dy$$

Für die so bestimmten Werthe der Koeffizienten ist nach No. 89. für $\psi(\gamma) \geqq x \geqq 0$

96. $$\int_a^y F(x)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + A_2\cos\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + A_3\cos\frac{3\pi x}{\psi(\gamma)} + \ldots.$$

Gesetzt nun die Gleichung $\psi(y) = x$ habe zwei Auflösungen y_1 und y_2 (wenn mehrere vorhanden sind, nehmen wir zwei derselben), so besitzt auch die Gleichung $\psi(y) = 0$ zwei Wurzeln η_1 und η_2; diess giebt zwei verschiedene Koeffizientenbestimmungen, nämlich

$$\tfrac{1}{2}\overset{I}{A_0} = \int_a^\gamma F(x)\,dx - \frac{1}{\psi(\gamma)}\int_{\eta_1}^\gamma F(y)\,\psi(y)\,dy$$

$$\overset{I}{A_n} = -\frac{2}{n\pi}\int_{\eta_1}^\gamma F(y)\sin\frac{n\pi\,\psi(y)}{\psi(\gamma)}\,dy$$

und

$$\tfrac{1}{2}\overset{II}{A_0} = \int^\gamma F(x)\,dx - \frac{1}{\psi(\gamma)}\int_{\eta_2}^\gamma F(y)\,\psi(y)\,dy$$

$$\overset{II}{A}_n = -\frac{2}{n\pi}\int_{\eta_2}^{\gamma} F(y)\, sin\, \frac{n\pi\,\psi(y)}{\psi(y)}\, dy$$

und ebenso hat man auch die beiden Reihenentwickelungen

$$\int_a^{y_1} F(x)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\overset{I}{A}_0 + \overset{I}{A}_1 \cos\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + \overset{I}{A}_2 \cos\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \overset{I}{A}_3 \cos\frac{3\pi x}{\psi(\gamma)} + \ldots$$

und

$$\int_a^{y_2} F(x)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\overset{II}{A}_0 + \overset{II}{A}_1 \cos\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + \overset{II}{A}_2 \cos\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \overset{II}{A}_3 \cos\frac{3\pi x}{\psi(\gamma)} + \ldots$$

Subtrahiren wir die erste Gleichung von der zweiten und setzen

97. $$\int_{y_1}^{y_2} F(x)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}P_0 + P_1 \cos\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + P_2 \cos\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + P_3 \cos\frac{3\pi x}{\psi(\gamma)} + \ldots.$$

so haben wir für die Koeffizienten P folgende Werthe

$$\tfrac{1}{2}P_0 = \tfrac{1}{2}\overset{II}{A}_0 - \tfrac{1}{2}\overset{I}{A}_0$$

d. i. vermöge der Werthe von $\tfrac{1}{2}\overset{I}{A}_0$ und $\tfrac{1}{2}\overset{II}{A}_0$

98. $$\tfrac{1}{2}P_0 = \frac{1}{\psi(\gamma)}\int_{\eta_1}^{\eta_2} F(y)\,\psi(y)\, dy$$

ferner ähnlich für P_n

99. $$P_n = \frac{2}{n\pi}\int_{\eta_1}^{\eta_2} F(y)\, sin\, \frac{n\pi\,\psi(y)}{\psi(\gamma)}\, dy$$

Da hier γ noch willkührlich ist, so wählen wir es der Art, dass $\psi(\gamma)$ dadurch seinen grössten positiven Werth M erhält, von dem wir voraussetzen, dass er nicht unendlich sei; wir haben dann die Entwickelungsformel

$$100. \qquad \int_{y_1}^{y_2} F(x)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} P_0 + P_1 \cos \frac{\pi x}{M} + P_2 \cos \frac{2\pi x}{M} + P_3 \cos \frac{3\pi x}{M} + \ldots.$$

$$M \geqq x \geqq 0$$

worin die Koeffizienten P mittelst der Formeln

$$101. \qquad \tfrac{1}{2} P_0 = \frac{1}{M} \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(y)\, \psi(y)\, dy$$

$$102. \qquad P_n = \frac{2}{n\pi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(y) \sin \frac{n\pi\, \psi(y)}{M}\, dy$$

bestimmt werden. Unter η_1 und η_2 verstehen wir wie immer zwei Wurzeln der Gleichung $\psi(y) = 0$.

II. Genau dieselben Substitutionen und kleinen Transformationen sind auf die Gleichungen 91. und 92. anwendbar; man findet so

$$103. \qquad \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)\, dx = \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)\, dx$$

$$+ Q_1 \sin \frac{\pi x}{M} + Q_2 \sin \frac{2\pi x}{M} + Q_3 \sin \frac{3\pi x}{M} + \ldots.$$

$$M \geqq x \geqq 0$$

wobei die Koeffizienten Q mit Hülfe der Formel

$$104. \qquad Q_n = -\frac{2}{n\pi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(y) \cos \frac{n\pi\, \psi(y)}{M}\, dy$$

zu bestimmen sind.

III. Man wird vielleicht ein paar Beispiele hierzu nicht ungern sehen. Sei daher zunächst

$$\psi(y) = 4y\,(1 - y)$$

so ist $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 1$; das Maximum M von $\psi(y)$ tritt ein für $y = \frac{1}{2}$ und ist $M = 1$. Die beiden Umkehrungen von $\psi(y) = x$ lassen sich in diesem Falle angeben nämlich

$$105. \qquad y_1 = \tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - x}\right)$$

106. $$y_2 = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{1-x})$$

Setzen wir ferner die willkührliche Funktion $F(x) = x^{\mu-1} : (1-x)$, so haben wir nach Formel 100.

107. $$\int_{y_1}^{y_2} \frac{x^{\mu-1}}{1-x}\, dx = \int_{\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-x})}^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-x})} x^{\mu-1} : (1-x)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} P_0 + P_1 \cos \pi x + P_2 \cos 2\pi x + P_3 \cos 3\pi x + \ldots.$$

$$1 \geqq x \geqq 0$$

und hier ist die Koeffizientenbestimmung folgende:

108. $$\tfrac{1}{2} P_0 = 4 \int_0^1 \frac{y^{\mu-1}}{1-y}\, y(1-y)\, dy = \frac{4}{\mu+1}$$

ferner:

$$P_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \frac{y^{\mu-1}}{1-y} \sin\,[4n\pi \,.\, y(1-y)]\, dy$$

und wenn wir für den Sinus die gleichgeltende Reihe

$$\sin v = \Sigma\, \frac{(-1)^k v^{2k+1}}{(2k+1)'} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

substituiren, so wird

$$P_n = \frac{2}{n\pi}\, \Sigma \frac{(-1)^k (4n\pi)^{2k+1}}{(2k+1)'} \int_0^1 y^{\mu+2k} (1-y)^{2k}\, dy$$

Der Werth des Integrales für sich ist

$$\frac{\Gamma(\mu+2k+1)\,\Gamma(2k+1)}{\Gamma(\mu+4k+2)}$$

$$= \frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+2k).(2k)'}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+4k+1)}$$

$$= \frac{(2k)'}{(\mu+2k+1)(\mu+2k+2)\ldots(\mu+4k+1)}$$

und hieraus ergiebt sich für P_n der Werth:

$$P_n = \frac{2}{n\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{2k+1} \cdot \frac{(4n\pi)^{2k+1}}{(\mu+2k+1)(\mu+2k+2)+\ldots(\mu+4k+1)}$$

oder auch wenn man das Summenzeichen auflöst

$$109. \quad P_n = 8 \left\{ \frac{1}{1.(\mu+1)} - \frac{(4n\pi)^2}{3.(\mu+3)(\mu+4)(\mu+5)} + \frac{(4n\pi)^4}{5.(\mu+5)(\mu+6)\ldots.(\mu+9)} - \ldots \right\}$$

Durch die Formeln 108. und 109. sind nun die in der Gleichung 107. vorkommenden Koeffizienten vollkommen bestimmt.

Ein zweites nicht uninteressantes Beispiel bilden die Annahmen

$$\psi(y) = y e^{-y}, \quad F(y) = \frac{e^{-y}}{y}$$

hier ist $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = \infty$ und das Maximum M tritt für $y = 1$ ein, nämlich $M = \frac{1}{e}$. Nach Formel 100. ist nun für $\frac{1}{e} \geqq x \geqq 0$

$$110. \int_{y_1}^{y_2} \frac{dx}{x} e^{-x}$$

$$= \tfrac{1}{2} P_0 + P_1 \cos \pi e x + P_2 \cos 2\pi e x + P_3 \cos 3\pi e x + \ldots..$$

und für die Koeffizienten haben wir folgende Werthe

$$111. \qquad \tfrac{1}{2} P_0 = e \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y} y e^{-y} dy = \frac{e}{2}$$

$$P_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y} \sin(n\pi y e^{-y})\, dy$$

oder wenn man den Sinus entwickelt und jedes einzelne Glied integrirt:

$$112. \; P_n = 2e \left\{ \frac{1}{1.2^1} - \frac{(n\pi e)^2}{3.4^3} + \frac{(n\pi e)^4}{5.6^5} - \ldots. \right\}$$

Die in den Formeln 110., 111. und 112. gegebene Berechnung eines bestimmten Integrales ist in so fern bemerkenswerth, als sie die Entwickelung zweier Integrallogarithmen darstellt, indem die Gleichung

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{dx}{x} e^{-x} = li(e^{-y_2}) - li(e^{-y_1})$$

vermöge der Definition des Integrallogarithmus statt findet.

Ebenso leicht wird man Beispiele für das Theorem in No. II. bilden, wobei man nur berücksichtigen muss, dass zur Convergenz der Reihe die Endlichkeit des Integrales

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)\, dx$$

hinreichend und nothwendig ist.

§. 9.

Obschon die Entwickelungen, die wir bisher gegeben haben, eine Allgemeinheit besitzen, welche für die meisten praktischen Anwendungen hinreicht, so können wir doch noch einen Schritt weiter gehen und auch die letzte stattfindende Beschränkung wegschaffen. Es gelten nämlich die bisherigen Formeln nur für wesentlich positive x, was darin seinen Grund hat, dass die Reihenentwickelungen

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \frac{\pi x}{c} + A_2 \cos \frac{2\pi x}{c} + \ldots$$

$$\varphi(x) = B_1 \sin \frac{\pi x}{c} + B_2 \sin \frac{2\pi x}{c} + \ldots..$$

von denen wir ausgingen, selbst nur für positive x richtig bleiben, für negative x dagegen blos dann gelten, wenn entweder zufällig $\varphi(-x) = \varphi(+x)$ oder $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ ist. Ob aber eine dieser Eigenschaften statt findet, lässt sich, da $\varphi(x)$ als Umkehrung von $\psi(y)$ erscheint, im Allgemeinen nicht entscheiden, wenn nicht, wie z. B. beim Kepler'schen Probleme, besonders glückliche Umstände eintreten. Wir geben daher noch eine Entwickelung, welche auf positive und negative x gleichförmig passt, und nehmen dabei unsern Auslauf von der bekannten Formel

$$113.\quad F(x) = \tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \frac{\pi x}{c} + A_2 \cos \frac{2\pi x}{c} + \ldots$$

$$+ B_1 \sin \frac{\pi x}{c} + B_2 \sin \frac{2\pi x}{c} + \ldots.$$

welche für alle in dem Intervalle $x = -c$ bis $x = +c$ begriffene x gilt, sobald die Koeffizienten A und B mittelst der Formeln

$$114.\qquad A_n = \frac{1}{c} \int_{-c}^{c} F(x) \cos \frac{n\pi x}{c}\, dy$$

115. $$B_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} F(x) \sin\frac{n\pi x}{c}\, dx$$

bestimmt werden. Die Anwendung hiervon ist folgende:

Es sei wieder $x = \psi(y)$ und eine gegebene Funktion $f(y)$ der umgekehrten Funktion $y = \varphi(x)$ zu entwickeln. Wir setzen dann das vorige $F(x) = f[\varphi(x)] = f(y)$ und haben

$$A_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(y) \cos\frac{n\pi x}{c}\, dx$$

$$B_n = \int_{-c}^{c} f(y) \sin\frac{n\pi x}{c}\, dx.$$

Durch partielle Integration ist nun gleich wie früher

$$\int f(y) \cos\frac{n\pi x}{c}\, dx$$

$$= \frac{c}{n\pi} f(y) \sin\frac{n\pi x}{c} - \frac{c}{n\pi}\int f'(y)\, dy \sin\frac{n\pi x}{c}$$

$$= \frac{c}{\pi n} f(y) \sin\frac{n\pi\psi(y)}{c} - \frac{c}{n\pi}\int f'(y) \sin\frac{n\pi\psi(y)}{c}\, dy$$

woraus sich A_n durch Multiplikation mit $\frac{1}{c}$ und Einführung der Gränzen $x = c$, $x = -c$ ergiebt. Hierbei ist aber c beliebig und demnach leicht zu erhalten, wenn man in der Gleichung $\psi(y) = x$ dem y einen willkührlichen Werth γ der Art ertheilt, dass ein positiver Werth von x herauskommt; diesen speziellen Werth von x nennen wir nachher c, und so entspricht der oberen Integrationsgränze $x = c$ die Integrationsgränze $y = \gamma$. Um die Integrationsgränze für y zu finden, brauchen wir nur zu bemerken, dass $x = -c = -\psi(\gamma)$ oder $\psi(y) = -\psi(\gamma)$ sein soll, also die untere Integrationsgränze, die etwa $\overline{\gamma}$ heissen möge, eine Wurzel der Gleichung $\psi(y) = -\psi(\gamma)$ sein muss. Nach diesen Bemerkungen ist nun, wenn $f(y)$ weder für $y = \gamma$ noch für $y = \overline{\gamma}$ unendlich wird,

116. $$A_n = -\frac{1}{n\pi}\int_{\overline{\gamma}}^{\gamma} f'(y) \sin\frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)}\, dy$$

und ebenso leicht findet man für $\frac{1}{2}A_0$ und B_n die Formeln

$$\frac{1}{2}A_0 = \frac{f(\gamma)+f(\overline{\gamma})}{2} - \frac{1}{2\psi(\gamma)}\int_{\overline{\gamma}}^{\gamma} f'(y)\,\psi(y)\,dy$$

$$B_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\left\{f(\gamma)-f(\overline{\gamma})\right\}$$

$$+\frac{1}{n\pi}\int_{\overline{\gamma}}^{\gamma} f'(y)\cos\frac{n\pi\,\psi(y)}{\psi(\gamma)}\,dy$$

wobei also festzuhalten ist, dass γ willkührlich bleibt, aber $\psi(\gamma)$ positiv ausfallen und $\overline{\gamma}$ eine Wurzel der Gleichung $\psi(y) = -\psi(\gamma)$ sein muss. Für die so bestimmten Koeffizienten gilt die Entwickelung

$$f(y) = \frac{1}{2}A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + A_2\cos\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \ldots$$

$$+ B_1\sin\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + B_n\sin\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \ldots\ldots$$

unter der Bedingung $c > x > -c$ d. h. $\psi(\gamma) > x > -\psi(\gamma)$.

Da man berechtigt ist, für $\overline{\gamma}$ alle Wurzeln der Gleichung $\psi(y) = -\psi(\gamma)$ zu setzen, so giebt die Formel wieder sämmtliche Umkehrungen der Gleichung $x = \psi(y)$.

Etwas bequemer wird die Formel noch, wenn man

118. $$C_n = \frac{1}{n\pi}\int_{\overline{\gamma}}^{\gamma} f'(y)\cos\frac{n\pi\,\psi(y)}{\psi(\gamma)}\,dy$$

setzt, wodurch man zunächst erhält

$$f(y) = \frac{1}{2}A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + A_2\cos\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \ldots$$

$$+ \frac{f(\gamma)-f(\overline{\gamma})}{\pi}\left\{\frac{1}{1}\sin\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \ldots\right\}$$

$$+ C_1\sin\frac{\pi x}{\psi(\gamma)} + C_2\sin\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)} + \ldots$$

oder durch Summirung der mittleren Reihe

119. $$f(y) = \frac{f(\gamma)-f(\overline{\gamma})}{\psi(\gamma)}\,\frac{x}{2} + \frac{1}{2}A_0$$

$$+A_1 \cos\frac{\pi x}{\psi(\gamma)}+A_2\cos\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)}+A_3\cos\frac{3\pi x}{\psi(\gamma)}+\dots$$

$$+C_1 \sin\frac{\pi x}{\psi(\gamma)}+C_2\sin\frac{2\pi x}{\psi(\gamma)}+C_3\sin\frac{3\pi x}{\psi(\gamma)}+\dots$$

Um den Gebrauch dieser für $\psi(\gamma)>x>-\psi(\gamma)$ geltenden Formel an einem Beispiele zu zeigen, setzen wir $f(y)=y$ und $\psi(y)=y\,e^y$. Geben wir dem y den willkürlichen speziellen positiven Werth $y=\gamma$, so wird $\psi(\gamma)=\gamma e^\gamma$ und nun handelt es sich zunächst um die Bestimmung von $\overline{\gamma}$, d. h. um Auflösung der transscendenten Gleichung

$$y\,e^y=-\gamma\,e^\gamma$$

Man übersieht auf der Stelle, dass dieselbe keine positive Wurzel hat; nehmen wir daher $y=-z$, so wird

$$z\,e^{-z}=\gamma\,e^\gamma$$

was aber für kein reelles z möglich ist, weil das Maximum von $z\,e^{-z}$ (nämlich $\frac{1}{e}$) weniger als γe^γ beträgt. Setzen wir daher $z=u+vi$, wo i wie gewöhnlich die imaginäre Einheit bezeichnet, so ist

$$(u+vi)\,e^{-u}(\cos v-i\sin v)=\gamma\,e^\gamma$$

und durch Sonderung der reellen und imaginären Bestandtheile

120. $$e^{-u}(u\cos v+v\sin v)=\gamma\,e^\gamma$$

121. $$e^{-u}(v\cos v-u\sin v)=0$$

Die zweite Gleichung ist auf doppelte Weise erfüllbar, indem entweder der eine oder der andere Faktor zum Verschwinden gebracht wird. Wollte man aber e^{-u} durch die Annahme $u=\infty$ annulliren, so würde die erste Gleichung in $0=\gamma e^\gamma$ übergehen, was unrichtig ist und wir müssen daher

$$v\cos v-u\sin v=0$$

setzen, woraus folgt

122. $$u=v\cot v$$

Durch Substitution hiervon verwandelt sich die Gleichung 121. in

$$v\,e^{-v\cot v}=\gamma e^\gamma\sin v.$$

Nennen wir β eine Wurzel derselben, so ergiebt sich aus 122. eine zugehörige Wurzel $u=\alpha$ und es ist nun $z=\alpha+\beta i$ oder $\overline{\gamma}=$

— $(\alpha+\beta i)$ gefunden. Man kann sich hierbei eine wesentliche Erleichterung dadurch verschaffen, dass man dem γ einen Werth giebt, der den zugehörigen Werth von β sogleich erkennen lässt. Nehmen wir z. B. für γ die reelle Wurzel der Gleichung $ye^y=\frac{\pi}{2}$, so wird die vorige Gleichung einfacher

$$v\,e^{-v\cot v}=\frac{\pi}{2}\sin v$$

und dieser genügt $v=\pm\frac{\pi}{2}$, woraus nachher $u=0$ und $\overline{\gamma}=\pm\frac{\pi}{2}i$ folgt. Eine Umkehrung der gegebenen Gleichung $x=y\,e^y$ wäre also, da jetzt $\psi(\gamma)=\frac{\pi}{2}$ ist, und für $\overline{\gamma}=+\frac{\pi}{2}i$

123.
$$y=(\gamma-\frac{\pi}{2}i)\frac{x}{\pi}+\tfrac{1}{2}A_0$$
$$+A_1\cos 2x+A_2\cos 4x+A_3\cos 6x+\ldots.$$
$$+C_1\sin 2x+C_2\sin 4x+C_3\sin 6x+\ldots$$
$$\frac{\pi}{2}>x>-\frac{\pi}{2}$$

und hier gelten für die Koeffizienten folgende Formeln:

$$\tfrac{1}{2}A_0=\tfrac{1}{2}(\gamma+\frac{\pi}{2}i)-\frac{\pi-e^\gamma+i}{\pi}$$

$$A_n=-\frac{1}{n\pi}\int_{\frac{1}{2}\pi i}^{\gamma}\sin(2n\,y\,e^y)\,dy$$

$$C_n=+\frac{1}{n\pi}\int_{\frac{1}{2}\pi i}^{\gamma}\cos(2n\,y\,e^y)\,dy$$

worin also γ die positive Wurzel der Gleichung $y\,e^y=\frac{\pi}{2}$ bedeutet. Führt man die angedeuteten Integrationen aus, so erhalten A_n und C_n complexe Werthe, wie es auch sein muss, weil die für y aufgestellte Doppelreihe zugleich für negative x gilt, denen keine reelle Umkehrung entspricht.

§. 10.

Es giebt noch eine zweite Form, unter der sich die Umkehrungen einer gegebenen Funktion darstellen lassen und die dadurch bemerkenswerth ist, dass sie nicht in einer Reihenentwickelung, sondern in einer Integration zwischen gewissen Gränzen besteht. Wir werden nämlich zeigen, dass die Umkehrung der Gleichung $x = \psi(y)$ jederzeit durch Integrale von den Formen

$$\int_0^\infty U \cos xu \, du \quad \text{oder} \quad \int_0^\infty V \sin xu \, du$$

ausgedrückt werden kann, wobei U und V von u allein abhängen und x constant bleibt in Beziehung auf die nach u auszuführende Integration. Diese Darstellungsweise bietet den Vortheil, y in geschlossener Form zu geben, die namentlich da, wo mit y noch anderweite Operationen vorgenommen werden sollen, ungleich bequemer und handlicher ist, als eine unendliche Reihe. Wir stützen uns bei dieser Entwickelung zunächst auf die beiden von Fourier gegebenen Formeln

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos xu \, du \int_0^c F(t) \cos ut \, dt$$

$$c > x \geqq 0$$

und

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin xu \, du \int_0^c F(t) \sin ut \, dt$$

$$c > x > 0$$

in denen x als Constante anzusehen ist hinsichtlich der successiv nach t und u auszuführenden Integrationen. Da in einem bestimmten Integrale nichts darauf ankommt, mit welchem Buchstaben man diejenige Variable bezeichnet, in Bezug auf welche integrirt wird, so kann man die beiden obigen Formeln auch in nachstehender Gestalt darstellen

$$124. \begin{cases} F(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \cos xu \, du \int_0^c F(x) \cos ux \, dx \\ \qquad c > x \geqq 0 \end{cases}$$

und

$$125.\quad \begin{cases} F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin xu\, du \int_0^c F(x) \sin ux\, dx \\ c > x > 0 \end{cases}$$

und hat dabei nur fest zu halten, dass zuerst in Beziehung auf x integrirt wird bei constant gelassenem u und nachher in Beziehung auf u bei constantem x.

Sei nun wieder $x = \psi(y)$ die gegebene Funktion und daraus $f(y) = f[\varphi(x)]$ zu entwickeln, so setzen wir das obige $F(x) = f[\varphi(x)] = f(y)$ und haben

$$\int F(x) \cos ux\, dx = \int f(y) \cos ux\, dx$$
$$= f(y) \frac{\sin ux}{u} - \frac{1}{u} \int f'(y)\, dy \sin ux$$
$$= f(y) \frac{\sin ux}{u} - \frac{1}{u} \int f'(y) \sin[u\psi(y)]\, dy$$

Durch Einführung der Integrationsgränzen $x = c$ und $x = 0$, denen wie früher die Werthe $y = \gamma$ und $y = \eta$ entsprechen mögen, wird jetzt unter der Voraussetzung, dass $f(\eta)$ nicht unendlich ist,

$$\int_0^c F(x) \cos ux\, dx = f(\gamma) \frac{\sin uc}{u} - \frac{1}{u} \int_\eta^\gamma f'(y) \sin[u\psi(y)]\, dy$$

und wenn wir diess in die Formel 124. substituiren

$F(x)$ d. h. $f(y)$

$$= \frac{2}{\pi} f(\gamma) \int_0^\infty \frac{\cos xu \sin cu}{u} du - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos xu}{u} du \int_\eta^\gamma f'(y) \sin[u\psi(y)]\, dy$$

Nach einem sehr bekannten Satze ist das erste Integral $= \frac{\pi}{2}$, so lange $x > c$ bleibt; diese Bedingung ist hier in der That erfüllt und wir haben daher die schöne Umkehrungsformel

$$126.\quad \begin{cases} f(y) = f(\gamma) - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u}\, du \int_\eta^\gamma f'(y)\sin[u\,\psi(y)]\, dy. \\ \psi(\gamma) > x \geqq 0 \end{cases}$$

Ganz ähnlich gestaltet sich die Behandlung des zweiten Fourier'schen Theoremes. Unter denselben Voraussetzungen ist nämlich

$$\int F(x)\sin ux\, dx = \int f(y)\sin ux\, dx$$

$$= -f(y)\,\frac{\cos ux}{u} + \frac{1}{u}\int f'(y)\, dy\, \cos ux$$

$$= -f(y)\,\frac{\cos ux}{u} + \frac{1}{u}\int f'(y)\cos[u\,\psi(y)]\, dy$$

Durch Einführung der Integrationsgränzen $x = c$ und $x = 0$, denen $y = \gamma$ und $y = \eta$ entsprechen, wird hieraus

$$\int_0^c F(x)\sin ux\, dx = -f(\gamma)\frac{\cos uc}{u} + f(\eta)\frac{1}{u}$$

$$+ \frac{1}{u}\int_\eta^\gamma f'(y)\cos[u\psi(y)]\, dy$$

und nun giebt die Substitution in No. 125.

$$F(x) \text{ d. h. } f(y) = -\frac{2}{\pi}f(\gamma)\int_0^\infty \frac{\sin xu \cos cu}{u}\, du + \frac{2}{\pi}f(\eta)\int_0^\infty \frac{\sin xu}{u}\, du$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin xu}{u}\, du \int_\eta^\gamma f'(y)\cos[u\psi(y)]\, dy$$

Das erste Integral verschwindet bekanntlich, weil $x < c$ ist und daher fällt der erste Ausdruck weg, wenn $f(\gamma)$ nicht unendlich wird; das zweite Integral hat für $x < 0$ den Werth $\frac{\pi}{2}$ und so bleibt

$$127.\quad \begin{cases} f(y) = f(\eta) + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin xu}{u}\, du \int_\eta^\gamma f'(y)\cos[u\,\psi(y)]\, du \\ \psi(\gamma) > x > 0. \end{cases}$$

In beiden Formeln 126. und 127. ist wie früher γ beliebig, aber $\psi(\gamma)$ muss positiv und η eine Wurzel der Gleichung $\psi(y) = 0$ sein. Setzt man für η der Reihe nach sämmtliche Wurzeln dieser Gleichung, so bekommt man die verschiedenen Umkehrungen der Gleichung $x = \psi(y)$. Die Grösse γ wählt man am vortheilhaftesten so, dass $\psi(\gamma)$ dadurch sein Maximum erhält.

§. 11.

Die soeben entwickelten Formeln gestatten ganz dieselben Anwendungen, wie die ihnen völlig analogen Reihenentwickelungen in den §§. 7 und 9. Nehmen wir z. B. sehr einfach $f(y) = y$ und $\psi(y) = y^\mu e^y$, so ist $\eta = 0$ und wir haben nach Formel 126.

$$128.\quad y = \gamma^\mu e^\gamma - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u}\,du \int_0^\gamma \sin\left\{u\,y^\mu e^y\right\}dy$$

wo sich die auf y bezügliche Integration leicht ausführen lässt, sobald μ eine ganze positive Zahl ist. Die Formel 127. giebt ähnlich

$$129.\quad y = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin xu}{u}\,du \int_0^\gamma \cos\left\{uy^\mu e^y\right\}dy$$

Wäre dagegen $\psi(y) = y^\mu e^{-y}$, so kann η ebensowohl $= 0$ als $= \infty$ sein und wir erhalten daher zwei Umkehrungen y_1 und y_2. Nehmen wir $\gamma = \mu$, wodurch $\psi(\gamma)$ sein Maximum $\left(\frac{\mu}{e}\right)^\mu = M$ erhält, so ist jetzt nach 126.

$$130.\quad y_1 = \mu - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u}\,du \int_0^\mu \sin\left[u\,y^\mu e^{-y}\right]dy$$

$$131.\quad y_2 = \mu + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u}\,du \int_\mu^\infty \sin\left[u\,y^\mu e^{-y}\right]dy$$

und ähnlich nach No. 127.

$$132.\quad y_1 = \frac{2}{\pi}\int^\infty \frac{\sin xu}{u}\,du \int_0^\mu \cos\left[u\,y^\mu e^{-y}\right]dy$$

$$133. \quad y_2 = \infty - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin xu}{u} \int_\mu^\infty \cos\left[u y^\mu e^{-y}\right] dy$$

Hier ist jedoch die letzte Formel unbrauchbar, weil das Integral

$$\int_\mu^\infty \cos\left[u y^\mu e^{-y}\right] dy = \int_\mu^\infty \left\{1 - \frac{u^2 y^{2\mu}}{1.2} e^{-2y} + \ldots\right\} dy$$

unendlich wird, wodurch sich die rechte Seite von No. 133. auf das nichtssagende Resultat $\infty - \infty$ reducirt; man muss sich daher an die Formeln 130. und 131. halten.

Subtrahirt man No. 130. und 131., so wird

134. $$y_2 - y_1$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u} du \left\{\int_\mu^\infty \sin\left[u y^\mu e^{-y}\right] dy + \int_0^\mu \sin\left[u y^\mu e^{-y}\right] dy\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u} du \int_0^\infty \sin\left[u y^\mu e^{-y}\right] dy$$

Man hat aber weiter

$$\int_0^\infty \sin\left[u y^\mu e^{-y}\right] dy$$

$$= \int_0^\infty \left\{\frac{u y^\mu}{1'} e^{-y} - \frac{u^3 y^{3\mu}}{3'} e^{-3y} + \ldots\right\} dy$$

$$= \frac{u\Gamma(\mu+1)}{1'.1^{\mu+1}} - \frac{u^3\Gamma(3\mu+1)}{3'.3^{3\mu+1}} + \frac{u^5\Gamma(5\mu+1)}{5'.5^{5\mu+1}} - \ldots$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$135. \quad U = \frac{\Gamma(\mu+1)}{1'.1^{\mu+1}} - \frac{u^2\Gamma(3\mu+1)}{3'.3^{3\mu+1}} + \frac{u^4\Gamma(5\mu+1)}{5'.5^{5\mu+1}} - \ldots$$

so giebt jetzt die Substitution in No. 134.

$$136. \quad y_2 - y_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty U \cos xu\, du$$

für $\mu = 1$ z. B. erhält U den sehr einfachen Werth

$$U = \frac{u^0}{1^2} - \frac{u^2}{3^4} + \frac{u^4}{5^6} - \frac{u^6}{7^8} + \dots.$$

Setzen wir überhaupt allgemeiner voraus, dass die Gleichung $\psi(y) = 0$ zwei reelle Wurzeln $y = \eta_1$ und $y = \eta_2$ habe, so ist in No. 126.

$$f(y_1) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u}\,dy \int_{\eta_1}^{\gamma} f'(y)\sin[u\psi(y)]\,dy$$

$$f(y_2) = +\frac{2}{\pi}\int^\infty \frac{\cos xu}{u}\,du \int_{\gamma}^{\eta_2} f'(y)\sin[u\psi(y)]\,dy$$

woraus man ähnlich wie vorhin durch Subtraktion erhält:

$$137.\quad f(y_2) - f(y_1) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u}\,du \int_{\eta_1}^{\eta_2} f'(y)\sin[u\psi(y)]\,dy$$

Eine ganz analoge Formel würde man aus der Gleichung 127. ableiten können, nämlich

$$138.\quad f(y_2) - f(y_1) = f(\eta_2) - f(\eta_1) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin xu}{u}\,du \int_{\eta_1}^{\eta_2} f'(y)\cos[u\psi(y)]\,dy$$

sie ist aber etwas unbequemer, weil sie sich leicht auf das triviale Resultat $f(y_2) - f(y_1) = \infty - \infty$ reduciren kann.

Setzen wir endlich noch

$$f(y) = \int_a^y F(x)\,dx$$

von $F(x)$ eine willkürliche Funktion von x bedeutet, so gehen die Gleichungen 137. und 138. in die folgenden über:

$$139.\quad \int_{y_1}^{y_2} F(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u}\,du \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(y)\sin[u\psi(y)]\,dy$$

und

140. $$\int_{y_1}^{y_2} F(x)\,dx = \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)\,dx$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin xu}{u}\,du\int_{\eta_1}^{\eta_2} F(y)\cos[u\,\psi(y)]\,dy,$$

wobei die erste Formel in der Regel brauchbarer sein wird als die zweite, weil die zwischen den Gränzen η_1 und η_2 genommenen Integrale leicht unendlich werden können. Beide Formeln sind aber in sofern von Werth, als durch sie die bisher noch nicht behandelte Aufgabe gelöst wird: ein bestimmtes Integral, dessen Integrationsgränzen nicht unmittelbar, sondern durch eine Funktionsgleichung gegeben sind, auf andere Integrale zurückzuführen, deren Gränzen nicht mehr durch eine Funktionsgleichung bestimmt werden. Dass hier eine solche Reduktion in der That geleistet ist, erhellt daraus, dass y_1 und y_2 Wurzeln einer literalen oder Funktionsgleichung sind, die sich nach bekannten Methoden finden lassen *).

§. 12.

Man kann sich endlich noch der ebenfalls von Fourier angegebenen für $c > x > -c$ geltenden Formel

141. $$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} du \int_{-c}^{c} F(t)\cos u(x-t)\,dt$$

zur Umkehrung der Funktion $x = \psi(y)$ bedienen und kommt dabei zu dem allgemeinsten Resultate, weil man hier nicht auf positive Werthe von x beschränkt ist. Wir geben zuerst der obigen Formel die folgende Gestalt:

142. $$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos xu\,du \int_{-c}^{c} F(t)\cos ut\,dt$$

---

*) M. s. die schöne Arbeit von Dr. *M. Stern:* Ueber die Auflösung transscendenter Gleichungen.

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin xu\,du \int_{-c}^{c} F(t)\sin ut\,dt$$

und betrachten die beiden Doppelintegrale vor der Hand einzeln, indem wir zugleich x für t schreiben, was bekanntlich erlaubt ist.

Für $x=\psi(y)$, umgekehrt $y=\varphi(x)$ und $f(y)=f[\varphi(x)]=F(x)$ ist nun ganz wie in §. 10.

$$\int F(x)\cos ux\,dx$$

$$=f(y)\frac{\sin ux}{u}-\frac{1}{u}\int f'(y)\sin(u\psi(y))\,dy$$

und

$$\int F(x)\sin ux\,dx$$

$$=-f(y)\frac{\cos ux}{u}+\frac{1}{u}\int f'(y)\cos[u\psi(y)]\,dy$$

und wenn wir die Integrationsgränzen $x=c$, $x=-c$ einführen, denen die Werthe $y=\gamma$ und $\overline{\gamma}$ entsprechen mögen

$$\int_{-c}^{c} F(x)\cos ux\,dx$$

$$=\left\{f(\overline{\gamma})+f(\gamma)\right\}\frac{\sin cu}{u}-\frac{1}{u}\int_{\overline{\gamma}}^{\gamma} f'(y)\sin[u\psi(y)]\,dy$$

und

$$\int_{-c}^{c} F(x)\sin ux\,dx$$

$$=\left\{f(\overline{\gamma})-f(\gamma)\right\}\frac{\cos cu}{u}+\frac{1}{u}\int_{\overline{\gamma}}^{\gamma} f'(y)\cos[u\psi(y)]\,dy$$

Hieraus ergiebt sich weiter, wenn wir wieder t für x schreiben, die erste Gleichung mit $\cos xu\,du$, die zweite mit $\sin xu\,du$ multipliziren und in Beziehung auf u zwischen den Gränzen $u=0$, $u=\infty$ integriren

$$\int_0^\infty \cos xu\, du \int_{-c}^{c} F(t) \cos ut\, dt$$

$$= \left\{ f(\overline{\gamma}) + f(\gamma) \right\} \int_0^\infty \frac{\sin cu \cos xu}{u}\, du$$

$$- \int_0^\infty \frac{\cos xu}{u}\, du \int_{\overline{\gamma}}^{\gamma} f'(y) \sin[u\psi(y)]\, dy$$

und

$$\int_0^\infty \sin xu\, du \int_{-c}^{c} F(t) \sin ut\, dt$$

$$= \left\{ f(\overline{\gamma}) - f(\gamma) \right\} \int_0^\infty \frac{\cos cu \sin xu}{u}\, du$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\sin xu}{u}\, du \int_{\overline{\gamma}}^{\gamma} f'(y) \cos[u\psi(y)]\, dy$$

Weil nun $c > x$ ist, so haben wir nach bekannten Sätzen

$$\int_0^\infty \frac{\sin cu \cos xu}{u}\, du = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos cu \sin xu}{u}\, du = 0$$

und mithin vereinfachen sich die vorigen Gleichungen, wenn man noch mit $\frac{1}{\pi}$ multiplizirt, folgendermaassen

143. $$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos xu\, du \int_{-c}^{c} F(t) \cos ut\, dt$$

$$= \frac{f(\gamma) + f(\overline{\gamma})}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u}\, du \int_{\overline{\gamma}}^{\gamma} f'(y) \sin[u\psi(y)]\, dy$$

und

144. $$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin xu\,du \int_{-c}^{c} F(t)\sin ut\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin xu}{u}\,du \int_{\overline{\gamma}}^{\gamma} f'(y)\cos[u\,\psi(y)]\,dy.$$

Die Summe dieser Gleichungen giebt $F(x)$ oder $f(y)$ und so gelangen wir zu der Formel

145. $$f(y) = \frac{f(\gamma)+f(\overline{\gamma})}{2}$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{du}{u}\int_{\overline{\gamma}}^{\gamma} f'(y)\sin u\,[x-\psi(y)]\,dy$$

wobei nur festzuhalten ist, dass γ willkührlich gewählt werden darf, $\overline{\gamma}$ aber eine Wurzel der Gleichung $\psi(y) = -\psi(\gamma)$ sein muss. Die Umkehrungsformel gilt so lange, als x zwischen den Gränzen $\psi(\gamma)$ und $\psi(\overline{\gamma}) = -\psi(\gamma)$ enthalten ist und sie bezieht sich demnach gleichförmig auf positive wie negative x. Demnach können wir sie als die bis jetzt allgemeinste Umkehrungsformel der Gleichung $x = \psi(y)$ bezeichnen.

Druckfehler.

S. 2 Formel 7. statt $D\left(\frac{y}{\psi(y)}\right)$ lies $D\left(\frac{y}{\psi(y)}\right)^2$

S. 13 Formel 19. statt $\psi(\eta)$ l. $\psi(\gamma)$

S. 13 Z. 8 v. u. statt A_n l. A_0

S. 17 Formel 29. statt $e^{-\gamma}$ l. e^{-y}

S. 18 statt Formel 3G. l. 36.

ebendas. statt $\frac{3}{M}$ l. $\frac{1}{M}$

S. 25 Formel 62. statt $a_0{}^{\mu}$ l. $a_0 y^{\mu}$ (y ist ausgefallen)

S. 28 Z. 1 v. o. statt „dem" l. „den".

Die äussere Ausstattung ist in jeder Beziehung vorzüglich. Möchte es doch dem Herrn Verfasser gefallen, auch die merkwürdigen Punkte des sphärischen Dreiecks in ähnlicher lehrreicher Weise zu behandeln.

Dr. Wiegand, Die Elemente der Geometrie und deren praktische Anwendung für den Bürger und Landwirth, mit besonderer Berücksichtigung des Bedürfnisses der Lehrer an Volks- und Fortbildungsschulen, Seminarien sowie landwirthschaftlichen Lehranstalten. Nach einer veranschaulichenden Methode bearbeitet. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. 1848. 12½ Sgr.

Dr. Wiegand, der geodätische Meßapparat und sein Gebrauch. Ein Hülfsmittel beim Vortrage der Geometrie auf höheren Lehranstalten zur Hinweisung auf die praktische Anwendung dieser Wissenschaft. Zweite vermehrte Auflage. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. 1848. 6 Sgr.

Hr. Prof. Grunert sagt darüber:

Diese beiden in gewisser Beziehung zusammen gehörenden und sich ergänzenden Schriften entsprechen ihrem auf dem Titel genannten Zwecke sehr wohl. Daß der Herr Verf. in der zweiten Schrift auch die Meßinstrumente des bekannten Dr. Romershausen beschrieben hat, ist ganz recht und zweckmäßig, da diese Instrumente meistens sinnreich eingerichtet sind und eine weitere Verbreitung wohl verdienen.

Dr. Wiegand, Lehrbuch der Planimetrie für den Schul- und Privatunterricht mit Kupfern.

Erster Cursus. Zweite Auflage. 1847. 10 Sgr.
Zweiter Cursus. Zweite Auflage. 1848. 10 Sgr.

Was die vom Herrn Verfasser in der Vorrede angedeutete Methode betrifft, so hat er die entgegengesetzte Methode mit Umsicht vermittelt und wir können sein Lehrbuch für sehr brauchbar, als Leitfaden sowohl beim öffentlichen als Privatunterricht, erklären ꝛc.

Director Looff in der pädagog. Ltrztg.

Das baldige Erscheinen einer zweiten Auflage dieses empfehlenswerthen Lehrbuchs ist der beste Beweis für dessen Brauchbarkeit ꝛc.

Professor Grunert im Archiv der Math. u. Phys.

Dr. Wiegand, Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik für den Schul- und Privatunterricht. 1844. 12½ Sgr.

Schon in unserer Anzeige des Lehrbuchs der Planimetrie von dem Verfasser haben wir die Gründlichkeit und Deutlichkeit desselben lobend erwähnen können und dieses Lob können wir auch auf das vorliegende Lehrbuch der Arithmetik übertragen ꝛc.

Director Looff in der pädagog. Ltrztg.

Dr. Wiegand, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Nach einer streng wissenschaftlichen Methode bearbeitet. 1845. mit Kupfern. 10 Sgr.

Dr. Wiegand, Grundriss der mathematischen Geographie. Für höhere Lehranstalten entworfen. Mit eingedruckten Holzschnitten. 1846. 10 Sgr.

Herr Director Schnitzer in Reutlingen sagt am Schlusse seiner ausführlichen Recension: Wir haben uns mit diesem Werkchen länger beschäftigt, weil wir es durchaus verständig angelegt finden ꝛc. Pädagog. Vierteljahrsschrift. (Mittelschule.)

Wegen der folgenden Schriften müssen wir wegen Mangels an Raum auf die sehr anerkennenden Recensionen in *Crelle's Journal*, *Grunert's Archiv*, *Looff's pädag. Zeitung*, *Graefe & Clemen's pädag. Zeitung*, *Pädagog. Vierteljahrschrift*, *The mathematician* etc. etc. verweisen.

Dr. Wiegand, Lehrbuch der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie für die obern Klassen höherer Lehranstalten. 1845. mit Kupfern. 15 Sgr.

Dr. Wiegand, Lehrbuch der algebraischen Analysis für die obern Klassen höherer Lehranstalten, so wie als Einleitung in die Analysis des Unendlichen, für angehende Studirende. 1847. 12½ Sgr.

Dr. Wiegand, Lehrsätze und Aufgaben aus des Herrn Prof. Jacob Anhängen zu van Swindens Elementen der Geometrie. Mit Beweisen, Auflösungen und Ergänzungen, herausgegeben von etc. 1847. 1. Bd. und 2. Bd. 1. Abth. 1 Thlr. 24 Sgr.

Dr. Wiegand, Elementare Sätze aus der Coordinaten-Geometrie etc. Von Rutherford und Fenwick Mit Holzschnitten. Aus dem Englischen von etc. 1846. 6 Sgr.

Prof. Dr. Kunze, Entwickelung des binomischen Lehrsatzes für jede Art von Exponenten. 2 Ausg. 10 Sgr.

Prof. Dr. Kunze, Ueber einige theils bekannte, theils neue Sätze vom Dreieck und Viereck. Mit 1 Kupfertafel. 2. Ausg. 10 Sgr.

Antiquaria.

Lippert und **Schmidts Antiquarische Buchhandlung** theilt **gratis** (direct oder durch jede beliebige Buchhandlung) mit:

Cataloge ihres Lagers von Antiquarisch **Mathematischen** Schriften 1500 Bände

" " " " **Astronomischen** 800 "

Die im Cataloge bemerkten Werke sind zu den beigefügten billigen Preisen ebenfalls durch jede Buchhandlung zu beziehen.
